J5	Juniorska grupa

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2022./23.

Površine

Mislav Brnetić

21. siječnja 2023.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

1. Uvod

Na današnjem predavanju primarno ćemo se baviti zadacima u geometriji u kojima je cilj odrediti površinu određenih likova, odrediti neka druga svojstva ili dokazati neke tvrdnje korištenjem površina.

Za početak, prisjetimo se osnovnih formula za površinu nekih likova:

- trokut s duljinom stranice a i visinom v_a na tu stranicu

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

- trokut s duljinama stranica a, b i c *(Heronova formula)*

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

  pri čemu je $s = \frac{a+b+c}{2}$

- paralelogram s duljinom stranice a i visinom v_a na tu stranicu

$$P = a \cdot v_a$$

- kružnica s duljinom polumjera r

$$P = r^2\pi$$

Također, prisjetimo se kada su dva trokuta sukladna, odnosno slična.

Teorem 1.1: Sukladnost trokuta

Dva su trokuta sukladna ako vrijedi nešto od sljedećeg:

- stranice su im jednake duljine (SSS)
- dvije stranice su im jednake duljine te je kut između njih jednake veličine (SKS)
- jedna stranica im je jednake duljine te su dva kuta jednake veličine (KSK)
- dvije stranice su im jednake duljine te je kut nasuprot dužoj jednake veličine (SSK)

Teorem 1.2: Sličnost trokuta

Dva su trokuta slična ako vrijedi nešto od sljedećeg:

- dva kuta su im jednake veličine (KK)
- dvije stranice su im u istom omjeru te je kut između njih jednake veličine (SKS)

- stranice su im u istom omjeru (SSS)

Za sukladne, odnosno slične trokute vrijedi sljedeće:

Propozicija 1.3

Neka su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ slični s koeficijentom sličnosti k, odnosno vrijedi

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|CA|}{|FD|} = k.$$

Tada vrijedi

$$\frac{P(\triangle ABC)}{P(\triangle DEF)} = k^2.$$

Posebno, dva sukladna trokuta imaju jednaku površinu.

Dokaz ove propozicije ostavljam za vježbu.

Lakši zadaci

1. Dokažite da težišnica dijeli trokut na dva trokuta jednakih površina.
2. Površina presjeka većeg i manjeg kvadrata iznosi dvije trećine površine manjeg kvadrata, a također i jednu petinu površine njihove unije. Odredite omjer duljina stranica većeg i manjeg kvadrata.
3. Koliki je omjer površina kvadrata upisanog u kružnicu i jednakostraničnog trokuta opisanog toj istoj kružnici?
4. Dan je kvadrat $ABCD$ stranice duljine a. Vrhovi A i C središta su dviju kružnica koje prolaze točkama B i D. Ako su sjecišta tih kružnica s dijagonalom $\overline{AC}$ točke M i N, odredite površinu četverokuta $BMDN$.
5. Zadan je pravokutnik $ABCD$ sa stranicama duljina $|AB| = 16cm$ i $|BC| = 12cm$. Dijagonale pravokutnika sijeku se u točki S. Na stranici $\overline{AB}$ pravokutnika $ABCD$ je točka E koja je jednako udaljena od vrha A i točke S. Izračunaj površinu trokuta $\triangle AES$.
6. Neka je $\triangle ABC$ jednakostraničan te P neka točka unutar tog trokuta. Dokažite da zbroj udaljenosti te točke od stranica trokuta ne ovisi o izboru točke (odnosno jednak je za bilo koji izbor točke P).
7. Opseg pravokutnog trokuta iznosi 18, a površina 9. Kolika je duljina hipotenuze tog trokuta?
8. Neka je $ABCD$ pravokutnik sa središtem O i neka su točke P i Q na dijagonali $\overline{AC}$ takve da je $|AP| = |PQ| = |QC|$. Ako pravac PB siječe stranicu $\overline{AD}$ u točki M, a pravac BQ siječe stranicu $\overline{CD}$ u točki N, dokažite da su površine trokuta $\triangle MPO$ i $\triangle NQO$ jednake.
9. Dan je jednakokračni pravokutni trokut čije su katete duljine 10. Odredite najveću moguću površinu pravokutnika čija jedna stranica leži na hipotenuzi, a po jedan vrh na katetama danog trokuta.
10. Zadan je trokut $\triangle ABC$. Iz vrha C nacrtana je visina $\overline{CN}$. Simetrala kuta $\angle BAC$ siječe visinu $\overline{CN}$ u točki D, a stranicu $\overline{BC}$ u točki E. Ako je trokut $\triangle DEC$ jednakostraničan trokut površine $4\sqrt{3}cm^2$, izračunajte površinu trokuta $\triangle ABC$.
11. Duljine dviju visina trokuta su 12 i 6. Dokažite da je duljina treće visine veća od 4.
12. Žicom duljine d treba ograditi zemljište u obliku kružnog isječka tako da površina tog zemljišta bude najveća moguća. Kolika je površina tako ograđenog zemljišta?

Teži zadaci

13. Zadan je konveksan četverokut $ABCD$ koji nije paralelogram. Neka pravac koji prolazi kroz polovišta dijagonala četverokuta siječe stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ redom u točkama M i N.

Dokaži da trokuti $\triangle ABN$ i $\triangle CDM$ imaju jednake površine.

14. Točke P i Q leže na stranici $\overline{AB}$ pravokutnika $ABCD$ tako da vrijedi $|AP| = |PQ| = |QB|$. Pravac DQ siječe pravce AC i CP redom u točkama K i L, a pravac DB siječe pravce AC i CP redom u točkama N i M.

Odredite omjer površina četverokuta $KLMN$ i pravokutnika $ABCD$.

15. Duljine stranica pravokutnika $ABCD$ su $|AB| = 3$ i $|BC| = 2$. Neka su točke E i F redom polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$. Neka je G sjecište dužina $\overline{FC}$ i $\overline{DE}$, a H sjecište dužina $\overline{AC}$ i $\overline{DE}$.

Izračunajte površinu četverokuta $AHGF$.

16. Dijagonale trapeza $ABCD$ s osnovicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ sijeku se u točki S. Označimo s P_1 površinu trokuta $\triangle ABS$, s P_2 površinu trokuta $\triangle CDS$ i s P površinu trapeza $ABCD$. Dokažite da je

$$P = \left(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}\right)^2 .$$

17. Dana je dužina $\overline{AD}$ duljine 3. Neka su B i C ($C \neq A$) točke na kružnici s promjerom $\overline{AD}$ takve da vrijedi $|AB| = |BC| = 1$. Izračunaj $|CD|$.

Hintovi

1. Iskažite površinu svakog od tih trokuta preko duljine stranice i visine. Zašto su te površine jednake?
2. Iskažite površine kvadrata preko duljina njihovih stranica te zatim zapišite uvjet zadatka.
3. Prikažite površinu upisanog kvadrata i opisanog trokuta preko duljine polumjera kružnice.
4. Kolika je duljina dužine $\overline{MN}$?
5. Primijenite Pitagorin poučak.
6. Kolika je površina trokuta $\triangle ABC$ u ovisnosti o površinama trokuta $\triangle ABP$, $\triangle BCP$ i $\triangle CAP$? Koliko iznose te površine?
7. Zapišite uvjete zadatka preko duljina stranica trokuta te primijenite Pitagorin poučak.
8. Primijetite da su $\triangle MAP$ i $\triangle BCP$ slični. Dokažite da je $\overline{MN}$ srednjica trokuta $\triangle ACD$.
9. Izrazite površinu pravokutnika u ovisnosti o duljini jedne stranice te zatim odredite najveću vrijednost.
10. Dokažite da je $\triangle ABC$ pravokutan.
11. Iskažite površine trokuta preko duljine stranice i visine za svaku stranicu te primijenite nejednakost trokuta.
12. Izrazite površinu kružnog isječka u ovisnosti o duljini polumjera te zatim odredite najveću vrijednost.
13. Uvedite nožišta okomica iz vrhova A, B, C i D na pravac EF.
14. Iskažite površinu četverokuta $KLMN$ preko duljina dužina $\overline{KM}$ i $\overline{LN}$.
15. Definirajte novu točku kao presjek DE i CB.
16. Prikažite površinu trapeza kao zbroj površina trokuta ABS, CDS, ASD, BCS te ih iskažite preko P_1 i P_2.
17. Iskažite površinu trokuta $\triangle ASB$, gdje je S središte kružnice, na dva načina.

Rješenja

1. Težišnica trokuta spaja vrh trokuta s polovištem nasuprotne stranice.

Neka je P polovište stranice $\overline{BC}$ trokuta $\triangle ABC$. Želimo dokazati da težišnica $\overline{AP}$ dijeli trokut $\triangle ABC$ na dva trokuta jednakih površina, $\triangle BPA$ i $\triangle PCA$.

$$P(\triangle BPA) = \frac{\frac{a}{2} \cdot v_a}{2} = \frac{a \cdot v_a}{4}$$
$$P(\triangle PCA) = \frac{\frac{a}{2} \cdot v_a}{2} = \frac{a \cdot v_a}{4}$$

$$\implies P(\triangle BPA) = P(\triangle PCA)$$

2. Školsko natjecanje 2015., A-1.3.

3. Challenging problems in Geometry, zadatak 5-4

4. Školsko natjecanje 2016., A-1.5.

5. Županijsko natjecanje 2019., 8.2.

6. Primijetimo kako vrijedi

$$P(\triangle ABC) = P(\triangle ABP) + P(\triangle BCP) + P(\triangle CAP)$$

Označimo s v_a duljinu visine trokuta $\triangle BCP$ iz vrha P na stranicu $\overline{BC}$.

Analogno, označimo s v_b i v_c duljine visina trokuta $\triangle CAP$ i $\triangle ABP$ iz vrha P.

Označimo s a duljinu stranice trokuta $\triangle ABC$.

Sada je

$$P(\triangle ABP) = \frac{a \cdot v_c}{2}$$
$$P(\triangle BCP) = \frac{a \cdot v_a}{2}$$
$$P(\triangle CAP) = \frac{a \cdot v_b}{2}$$

pa je

$$P(\triangle ABC) = \frac{a \cdot v_c}{2} + \frac{a \cdot v_a}{2} + \frac{a \cdot v_b}{2}$$
$$P(\triangle ABC) = \frac{a}{2}(v_a + v_b + v_c)$$
$$v_a + v_b + v_c = \frac{2P(\triangle ABC)}{a}$$

čime je dokaz završen s obzirom da površina trokuta $\triangle ABC$ ne ovisi o izboru točke P.

7. Županijsko natjecanje 2016., A-1.1.

8. Školsko natjecanje 2016., A-2.6.

9. Županijsko natjecanje 2016., A-2.1.

10. Županijsko natjecanje 2020., 8.3.

11. Neka je P površina zadanog trokuta, $v_a = 12$ i $v_b = 6$.

Vrijedi

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$$
$$12a = 6b = c \cdot v_c$$

Dodatno, iz nejednakosti trokuta vrijedi

$$a + b > c$$

$$a = \frac{c \cdot v_c}{12}$$
$$b = \frac{c \cdot v_c}{6}$$

$$\frac{c \cdot v_c}{12} + \frac{c \cdot v_c}{6} > c$$

$$v_c + 2v_c > 12$$
$$v_c > 4$$

12. Školsko natjecanje 2015., A-2.6.

13. Državno natjecanje 2009., A-1.2.

14. Županijsko natjecanje 2014., A-2.4.

15. Državno natjecanje 2018., 7.5.

16. Županijsko natjecanje 2019., 8.5.

17. Državno natjecanje 2016., A-1.2.