S4 Seniorska grupa
Predavanja subotom
Osijek, sezona 2022./23.

Teorija grafova

Ivan Vojvodić

10. prosinca 2022.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

1. Uvod

U ovom predavanju ćemo se baviti osnovnim pojmova iz teorije grafova. Definirajmo najprije sve bitne pojmove kako bismo kasnije mogli raditi s njima.

Definicija 1.1: Graf

Graf je uređeni par (V, E) pri čemu je V skup vrhova, a E skup bridova koji su zapravo uređeni parovi vrhova.

Uz grafove vežemo sljedeće pojmove:

- Graf je *jednostavan* ako nikoji vrh nije povezan sa sobom i svaka dva vrha su povezana najviše jednim bridom.
- Graf je *usmjeren* ako povezanost vrhova x i y ne povlači povezanost y i x.
- Graf je *potpun* ako su svaka dva vrha povezana bridom.
- Graf je *bipartitan* ako vrhove možemo podijeliti u dva skupa tako da za svaka dva vrha vrijedi da nisu povezana ako su u istom skupu.
- Graf je *planaran* ako ga možemo nacrtati tako da mu se bridovi ne sijeku.
- $G' = (V', E')$ je *podgraf* grafa $G = (V, E)$ ako je G' graf i $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E$.
- *Klika* je potpun podgraf nekog grafa.

Definicija 1.2: Dodatni pojmovi

- *Stupanj* vrha X je broj bridova koji izlaze iz tog vrha i označava se s $d(X)$.
- *Put* je niz vrhova i bridova $(v_1, e_1, v_2, e_2, ..., v_n)$ t.d je $e_k = (v_k, v_{k+1})$, te put prolazi svakim vrhom najviše jednom.
- *Ciklus* je put za koji vrijedi $v_1 = v_n$.

Specijalno, za graf kažemo da je *povezan* ako za svaka dva vrha postoji put iz jednog u drugi.

Definicija 1.3: Stablo

Stablo je povezan graf bez ciklusa. Specijalno, graf koji se sastoji od nekoliko stabla zovemo *šuma*.

Propozicija 1.4: Karakterizacija stabla

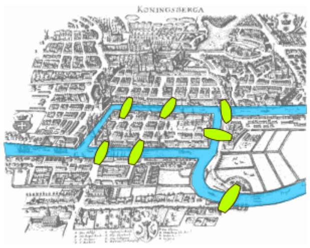
Graf je stablo ako i samo vrijede dvije činjenice s popisa (i te dvije povlače treću):

- Graf je povezan.
- Graf nema cikluse.

- Graf ima n vrhova i $n-1$ bridova.

2. Lakši zadaci

1. a) Dokaži da je $\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$
   b) Broj čvorova s neparnim stupnjem je paran. *(Lema o rukovanju)*
2. Dokažite da u grupi od 100 ljudi postoje barem dvije osobe koje imaju jednak broj prijatelja unutar te grupe.
3. Lucija i Ivan došli su na zabavu na kojoj su sudjelovala još četiri para. Prilikom dolaska dogodio se izvjestan broj rukovanja. Pritom se nitko nije rukovao sa svojim parom niti sa samim sobom. Kada je kasnije Ivan upitao sve prisutne s koliko su se osoba rukovali, dobio je devet različitih odgovora. S koliko se osoba rukovala Lucija?
4. Sedam mostova u Königsbergu (danas Kalinjingrad). Ovim poznatim problemom je počeo razvoj teorije grafova, a prvi ga je riješio Leonard Euler. Pitanje je: može li se proći svakim mostom točno jednom (jedini način da se prijeđe rijeka je preko mosta)?



5. Zadan je graf u kojem je za svaki vrh X vrijedi $d(x) \leq n$ dokaži da graf možemo obojati u $n+1$ boju tako da su svaka dva povezana vrha različite boje.

3. Umjereni zadaci

6. U jednoj državi između svaka dva grada postoji jednosmjerna avionska linija. Dokaži da je moguće krenuti iz nekog grada i obići sve gradove tako da niti jedan grad ne posjetimo dvaput.
7. U sobi je $2n+1$ ljudi, gdje je n prirodan broj. Za svaku skupinu od najviše n ljudi postoji osoba izvan te skupine koja ih sve poznaje. Dokažite da postoji osoba koja poznaje sve ostale u sobi.
8. S je skup od n brojeva. Koliko najviše parova $(x, y) \in S$ može zadovoljavati $x - y \in \langle 1, 2 \rangle$?

4. Teški zadaci

9. U jednom gradu je M ulica i N trgova, pri čemu su M i N prirodni brojevi takvi da je $M > N$. Svaka ulica povezuje dva trga i ne prolazi kroz druge trgove. Građani žele promijeniti izgled grada. Ove godine svaka će ulica biti po prvi put obojena crveno ili plavo. Dogovoreno je da se svake godine odabere jedan trg, te svim ulicama koje vode do tog trga istovremeno promijeni boja iz plave u crvenu i obratno. Dokaži da građani mogu odabrati boje ulica tako da se nikad u budućnosti ne može dogoditi da sve ulice budu iste boje.

Hintovi

1. Indukcija po broju rukovanja
2. Primjetimo da je zadani graf jednostavan, tj. koliko najviše/najmanje prijatelja ima jedna osoba?
3. Kako je mogao dobiti 9 različitih odgovora? Koliko moraju biti degree?
4. Svaki otok ima neparno mostova.
5. Greedy
6. Indukcija
7. Pokaži da postoji klika (inducirani podgraf je potpun) veličine barem $n + 1$
8. Postoji li klika veličine 3?
9. Promatrajte parnost transformacija ili cikluse u grafu.

Rješenja

1. a) Svaki brid pridonosi zbroju stupnjeva svih vrhova sa 2 budući da spaja 2 vrha pa svakome od njih povećava stupanj za 1. Zbog toga je $\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot$(broj bridova), odnosno paran broj.

b) Kada bi broj vrhova s neparnim stupnjem bio neparan ukupna suma stupnjeva svih vrhova u grafu bila bi neparna, što nije moguće po prethodnom zadatku kojeg smo pokazali.

2. Svaku osobu možemo zamisliti kao vrh grafa, a prijateljstva kao bridove među njima. Zadatak je pokazati da postoje barem 2 vrha istog stupnja.

Budući da imamo 100 vrhova, svaki od njih može biti stupnja najmanje 0 i najviše 99 (ukupno 100 mogućnosti). Međutim ne možemo istovremeno imati vrh koji je povezan sa svima ostalima (stupnja 99) i vrh koji nije povezan ni sa kojim drugim (stupnja 0), pa vidimo da imamo najviše 49 različitih mogućnosti za stupnjeve svakog vrha. Po Dirichletovom principu sigurno postoje barem 2 vrha istog stupnja.

Tvrdnja se analogno može pokazati za proizvoljan broj vrhova n. Jedino ograničenje je da graf mora biti jednostavan.

3. Lucija se rukovala s 4 osobe. Dokaz možete pronaći ovdje: državno 2011, SŠ1A, 5. zadatak

4. Primjetimo sljedeće: ukoliko postoji put koji prolazi svakim mostom točno jednom, onda možemo spariti most kojim smo došli u dio grada i most kojim smo izašli tim dijelom grada. To nam daje nužan uvijet da svi osim početnog i završnog dijela grada moraju biti povezani parnim brojem mostova s ostatkom grada.

No, kako svaki dio grada ima neparan broj mostova, onda će neki most uvijek ostati neposjećen.

Formalno govoreći o teoriji grafova, Euler je pokazao ne samo da je nužan uvijet na postojanje ture da postoje najviše dva čvora s neparnim stupnjem, već da je i dovoljan. Tj. ukoliko imate povezan graf u kojem postoje najviše dva čvora neparnog stupnja, tada nužno postoji tura koja prolazi svakim njegovim edgeom točno jednom.

5. Koristit ćemo sljedeći pohlepni algoritam: neka su boje označene brojevima $1, 2, 3, \ldots$ Odaberimo proizvoljan redoslijed vrhova kojim ćemo ih bojati.

Sada redom po svim vrhovima ponavljamo sljedeći postupak: obojimo vrh koji promatramo u najmanju moguću boju koju njegovi susjedi nemaju. Specijalno, ukoliko ni jedan njegov susjed nije obojan, bojamo ga bojom 1.

Očito ovaj algoritam garantira da nikoja dva susjedna vrha neće biti iste boje. Osim toga, algoritam osigurava da nećemo koristiti boje veće od $d+1$. Primjetimo da kada bismo koristili boju veću od $d+1$ da obojimo vrh, tada su boje $1, 2 \ldots, d+1$ već raspoređene na susjede tog vrha. To je naravno nemoguće jer taj vrh ima najviše d susjeda, pa oni ne mogu koristiti svih $d+1$ boja.

6. Zadatak ćemo riješiti indukcijom po broju čvorova u grafu. Baza je kad je jedan čvor. Po pretpostavci znamo da u svakom grafu s n čvorova postoji Hamiltonov put. Dodajmo još jedan čvor u taj graf i povežimo ga nekako u taj Hamiltonov put. Ako je brid iz njega u početni čvor puta usmjeren prema početnom čvoru puta gotovi smo. Isto vrijedi i ako je brid iz njega u završni čvor puta usmjeren prema njemu, a od završnog čvora.

U suprotnom moraju postojati dva susjedna čvora u Hamiltonovom putu takva da postoji brid iz ranije posjećenog u dodani čvor i brid iz dodanog čvora u kasnije posjećeni. Ovo znači da možemo na tom mjestu ubaciti dodani čvor u Hamiltonov put. Ovime je proveden korak indukcije.

7. Konstruiramo graf na uobičajeni način. Neka je C najveća klika u tom grafu, te k njezina veličina. Ako vrijedi $k < n$, onda postoji čvor izvan C, povezan sa svim čvorovima iz C (jer C možemo nadopuniti do proizvoljnog skupa veličine n na kojeg primjenimo pretpostavku zadatka), što znači da postoji veća klika.

Dakle, postoji klika veličine barem $n+1$. No, promatrajući skupinu najviše preostalih n ljudi koji nisu u kliki (ponovo, skup dopunimo po potrebi proizvoljnim osobama), postoji neka osoba koja ih sve poznaje. Ta osoba je u kliki i pozna sve koji nisu u kliki, pa onda poznaje sve ostale.

8. Uzmimo proizvoljna tri broja ($x \leq y \leq z$) i pretpostavimo da sva tri para zadovoljavaju uvjet. Tada vrijedi:

$$2 > y - x > 1$$

$$2 > z - y > 1$$

$$2 > z - x > 1$$

Zbrajanjem prvih dviju nejednakosti dobivamo:

$$z - x > 2$$

što je kontradikcija s trećom. Konstruirat ćemo graf u kojemu čvorovi predstavljaju brojeve iz S, a dva su povezana akko zadovoljavaju zadani uvjet.

Dokazali smo da taj graf nema trokuta, tj. klika veličine 3. Tvrdimo da takav graf ima najviše $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ bridova. Moguća konstrukcija kojom se postiže ograda je $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ brojeva su 1.5, a ostali 0.

Dokaz da je broj bridova zaista najviše $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ provodimo indukcijom. Baze za $n = 1$ i $n = 2$ možemo trivijalno provjeriti. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi pretpostavka da u grafu s n vrhova ima najviše $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ bridova. Provodimo korak indukcije. Promotrimo sada graf s $n+2$ vrhova. Odaberimo specijalno dva vrha koji su povezani bridom i označimo ih s X i Y. Preostao je graf za koji smo pretpostavili da ima najviše $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ bridova, a kako je povezan brid XY, postoji još najviše n bridova povezanih iz ostatka grafa do X ili Y (jer ne možemo isti čvor povezati i sa X i sa Y zbog uvjeta da trokuti ne postoje). Sređivanjem izraza dobijemo traženo:

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + n + 1 = \left\lfloor \frac{(n+2)^2}{4} \right\rfloor$$

9. Državno 2017, SŠ2A, 5. zadatak