J4	Juniorska grupa

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2022./23.

Prebrojavanja

Ivan Premuš, Paula Horvat

10. prosinca 2022.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

1. Uvod

U ovom predavanju prisjetit ćemo se osnovnih principa prebrojavanja te se posebno baviti dvostrukim prebrojavanjima. Mnogi zadaci iz područja kombinatorike bave se pitanjem prebrojavanja različitih skupova. Proći ćemo glavne metode prebrojavanja kao što su: princip produkta, princip bijekcije, dvostruka prebrojavanja...

Prije nego što krenete rješavati bilo koji kombinatorni zadatak vezan uz prebojavanje, morate si postaviti nekoliko važnih pitanja.

1. Što želim prebrojiti?
2. Koja svojstva ima to što želim prebrojiti?
3. Ako ne mogu izbrojati sve ono što ima tražena svojstva, mogu li prebrojat sve ono što NEMA ta svojstva?
4. Uočavam li neko pravilo prebrojavajući tražene elemente na malim skupovima?

Definicija 1.1: Faktorijeli

Neka je n prirodan broj. Definiramo $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Upravo je $n!$ broj permutacija skupa od n članova, tj. broj načina na moji možemo poredati n elemenata.
Na primjer, 10 učenika možemo poredati u vrstu na 10! načina zato što na prvo mjesto možemo staviti njih 10, na drugo 9 (sve osim prvo odabranog), ... i tako do zadnjeg mjesta na koje možemo staviti samo jednog.

Definicija 1.2: Binomni koeficijent

Neka su n i k nenegativni cijeli brojevi, $n \geq k$.
Definiramo $\binom{n}{k}$ (i čitamo n *povrh* k) kao broj načina za odabrati k-člani podskup iz n-članog skupa.

Primijetite kako poredak izabranih elemenata ovdje nije bitan.

Vrijedi:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

za n, k nenegativne cijele brojeve, $n \geq k$.

Na primjer, ako od 10 učenika biramo 3 učenika koja će biti u istoj grupi, to možemo napraviti na $\binom{10}{3}$ načina.

2. Osnovne metode

A i B su konačni skupovi.

- **Princip sume.** Ako imam 4 srebrne vilice i 5 zlatnih vilica, onda imam 9 vilica. Ako su A i B disjunktni skupovi, tada je $|A \cup B| = |A| + |B|$.
- **Princip produkta**. Ako imam 3 različite zdjelice i 5 različitih žlica, onda imam 15 različitih parova (zdjelica,žlica). Vrijedi $|A \times B| = |A||B|$.
- **Princip bijekcije.** Ako svakoj od svojih vilica mogu pridružiti jedinstven nož, onda imam jednako mnogo vilica i noževa. Ako imam jednako vilica i noževa, onda svakoj vilici mogu pridružiti jedinstven nož. Vrijedi $|A| = |B|$ ako i samo ako postoji bijekcija između A i B.
- **Princip komplementa.** Nekad je lakše prebrojati elemente sa suprotnim svojstvom i onda oduzeti od ukupnog broja elemenata u skupu. Npr. prvi zadatak, podzatadak c).
- **Dvostruko prebrojavanje.** Ako svoju kolekciju noževa prebrojim na dva različita načina, oba puta ću dobiti isti broj kao rezultat. Ova metoda često se može iskoristiti za dokazivanje jednakosti nekih izraza ili za dokazivanje da neka konstrukcija ne postoji.

Lakši zadaci

1. a) Koliko ima peteroznamenkastih brojeva?
   b) Koliko ima peteroznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke različite?
   c) Koliko ima peteroznamenkastih brojeva koji sadrže barem jednu znamenku 5?

2. Marija 20 različitih majica i 8 različitih traperica. Na koliko načina može odabrati odjevnu kombinaciju?

3. Mislav se igra sa špilom za belu. Odlučio je izvući bilo koje 3 karte iz špila od 32 karte. Na koliko načina on to može učiniti?

4. Na koliko se načina 8 topova može postaviti na šahovsku ploču tako da se međsobno ne napadaju?

5. Marin ima 10 prijatelja. Organizira rođendansku proslavu, međutim greškom je zaboravio pozvati nekih petero. Koliko je mogućih redoslijeda u kojima prijatelji koje je pozvao mogu doći na proslavu ako ne znamo koje je točno prijatelje pozvao?

6. Koliko anagrama ima riječ $MATEMATIKA$?

7. Na koliko načina 12 vitezova Okruglog stola može sjesti za okrugli stol?

8. Svaki od četiri zida sobe potrebno je obojiti jednom bojom tako da susjedni zidovi ne budu iste boje. Ako na raspolaganju imamo tri različite boje, na koliko je načina moguće obojiti sobu? Nije nužno upotrijebiti sve boje.

9. U nekom društvu trećina svih penzionera su šahisti, a četvrtina svih šahista su penzioneri. Ima li u tom društvu više šahista ili penzionera?

10. Dokaži sljedeće identitete kombinatornim argumentom. (Nađi kombinatornu interpretaciju lijeve i desne strane).
   a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
   b) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
   c) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Teži zadaci

11. Na koliko je načina moguće podijeliti n lopti na k djece? Što ako svatko mora dobiti barem 1 loptu?

12. a) Koliko ima najkraćih puteva u cjelobrojnoj mreži od točke $(-1, 0)$ do točke $(5, 7)$?

b) Koliko je takvih puteva koji ne prolaze točkom $(2, 3)$?

13. 15 učenika sudjeluje na ljetnom kampu. Svaki dan troje od njih čiste učionicu nakon predavanja. Kamp traje k dana, a svaki par učenika zajedno čisti učionicu točno jednom. Odredi k.

14. Dana je 3×9 ploča u kojoj je svako polje obojano plavo ili crveno. Dokaži da postoje 2 reda i 2 stupca (ne nužno za redom) čiji presjeci daju 4 polja iste boje.

15. Na koliko načina možemo staviti u red A medvjeda, B vukova i C ovaca tako da svaki medvjed mora stajati izmedu vuka i ovce te nijedan vuk ne smije stajati pokraj ovce?

16. Na ploči 6×4 dvanaest polja treba obojati tako da u svakom retku budu 2, a u svakom stupcu 3 obojana polja. Na koliko je načina to moguće postići?

17. Sto kvadratnih omotnica različitih veličina rasporedeno je tako da se za svake dvije različite omotnice manja omotnica nalazi unutar veće ili su omotnice jedna izvan druge. Pritom se i u manjoj i u većoj omotnici mogu nalaziti i druge omotnice. Dva rasporeda smatramo različitima ako postoje dvije omotnice koje se u jednom rasporedu nalaze jedna unutar druge, a u drugom ne.

18. Na Cambridgeu imamo n profesora i n studenata. Svaki profesor ocijenjuje svakog studenta s *prošao* ili s *pao*. Poznato je da ne postoji par studenata za koje postoji par profesora koji ih je jednako ocijenio. Dokaži da je ukupni broj ocjena *prošao* najviše $\frac{n}{2}(1 + \sqrt{4n - 3})$.

Hintovi

1. Promatraj znamenku po znamenku za prva dva podzadatka, a u trećem idi metodom komplementa.

2. Princip produkta.

3. Princip produkta, no pazi na to je li bitan poredak karti.

4. Promatraj na koliko načina prvi top možemo staviti u prvi red.

5. Permutacije s ponavljanjem.

6. Koliko puta se ponavlja riječ MATEMATIKA kada bi rješenje bilo 10!?

7. Fiksiraj jednog viteza.

8. Je li to slično ko i raspored ljudi oko okruglog stola?

9. Nešto.

- Ako gledaš lijevu stranu, što se dešava s ostatkom nakon što odabereš k ljudi?
- Promatraj grupu ljudi i fiksiraj 1 čovjeka.
- Pomatraj skup od n elemenata. Što možemo sa svakim?

10. Metoda štapića i kuglica.

11. Metoda dvostrukog prebrojavanja.

12. S obzirom da promatramo najkraće, smijemo ići samo gore i desno. Jedan takav put je DGGDDGDGDDGDD. Kako dobiti preostale?

13.

14.

15. Posebno promatraj paran i neparan broj medvjeda te uoči kako medvjedi dijele niz.

16. Prvo odaberi tražen broj od ukupnog broja, zatim promatraj 3 slučajeva.

17. Rekurzija.

18. Dirichletov princip.

Rješenja

1. Za prvu znamenku imamo 9 mogućnosti, a za ostale 4 po 10, dakle ukupno 90000. Za prvu znamenku imamo 9 mogućnosti, za drugu 9, a za svaku sljedeću 8, ukupno 41472. Za treći podzadatak rješenje je oduzeti od ukupnog broja peteroznamenkastih brojeva broj brojeva koji ne sadrže znamenku 5, a takvih ima 59049 pa je rješenje 30951.

2. Majicu bira na 20, a traperice na 8 načina, ukupno 160.

3. Mislav može prvu kartu izvući na 32 načina, drugu na 31, i treću na 30. Pošto poredak karata nije bitan, podijeliti ćemo taj umnožak s brojem poredaka te 3 karte: $\frac{32\cdot 31\cdot 30}{3\cdot 2\cdot 1} = 4960$.

4. S obzirom da će u svakom retku i svakom stupcu biti po jedan top, u prvom retku ga možemo postaviti na 8 načina, u drugom na 7... i u zadnjem na 1 način tako da je rješenje 8!.

5. Permutacije s ponavljanje, ukupno 151200.

6. Ukupno ima 10 slova pa njih možemo rasporediti na 10! načina. No neka slova se ponavljaju pa moramo podijeliti ukupan broj s brojem ponavljanja svakog slova. rezultate je $\frac{10!}{2!3!2!}$.

7. Fiksirajmo jednog viteza. Ostale možemo permutirati na 11! načina.

8. SŠ školsko 2020. 2.A zadatak 3.

9. Imomath predavanje dvostruko prebrojavanje

10. skripta iz Diskretne

11. AoPS wiki

12. Brilliant.org

13. (a) Promotrimo najkraće puteve od točke (a, b) do točke (c, d), pri čemu je $a \leq c$ i $b \leq d$. Najkraći putevi u tom slučaju sastoje se samo od pomaka gore i desno, i to točno $(c - a)$ desno i $(d - b)$ gore. Shvatimo li cijeli put kao niz određenog broja znakova G (gore) i D (desno), broj različitih puteva dobit ćemo kao broj različitih takvih nizova. Niz dobijemo odabirom mjesta za znakove (recimo) G, a to možemo učiniti na $\binom{\text{ukupno pomaka}}{\text{pomaka gore}} = \binom{c-a+d-b}{d-b}$ načina.
    Sada uz $a = -1$, $b = 0$, $c = 5$ i $d = 7$ dobivamo rješenje
    $$\binom{(5-(-1))+(7-0)}{7-0} = \binom{13}{7}.$$
    (b) Da bismo pronašli odgovor na ovo pitanje potrebno je prebrojati puteve koji prolaze točkom $(2, 3)$ i taj broj oduzeti od ukupnog broja puteva od $(-1, 0)$ do $(5, 7)$.
    Da bi put prolazio zadanom točkom moramo pronaći broj najkraćih puteva od početne točke do usputne zadane točke i od zadane točke do završne točke (i tada primijenimo princip produkta jer zapravo imamo uređen par dva puta). Tako dobivamo da je rješenje
    $$\underbrace{\binom{13}{7}}_{\text{svi putevi}} - \underbrace{\binom{2-(-1)+3-0}{3-0}}_{\text{prvi dio puta}} \cdot \underbrace{\binom{5-2+7-3}{7-3}}_{\text{drugi dio puta}} = \binom{13}{7} - \binom{6}{3} \cdot \binom{7}{4}.$$

14.

15. 3. zadatak

16. AIME 2007. P10

17. državno 2014, SŠ2A, 5

18. Državno 2001. 4. razred