S3	Seniorska grupa

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2022./23.

Polinomi

Josip Pupić
12.11.2022.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

1. Uvod

Definicija 1.1

Polinom n-tog stupnja je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana sa

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

gdje su $n \in \mathbb{N}_0, a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$.
Brojeve $a_0, ..., a_n$ zovemo **koeficijenti polinoma**, a_n **vodeći koeficijent**, a a_0 **slobodni koeficijent**.
Ako je $f \neq 0$, broj n zovemo **stupanj polinoma** i pišemo $degf = n$.
Ako je $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, onda polinom f zovemo **nul - polinom**, pišemo $f = 0$.
Ako je $a_n = 1$, kažemo da je polinom **normiran**. Ako postoji $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. takav da $f(x) = a$ za sve $x \in \mathbb{R}$, tada polinom f zovemo **konstantni polinom** i pišemo $f = a$.

Propozicija 1.2

Neka su f i g dva polinoma. Tada je:

1. $deg(fg) = deg(f) + deg(g)$
2. $deg(f + g) \leq \max\{deg(f), deg(g)\}$
3. $deg(f \circ g) = deg(f) \cdot deg(g)$

Definicija 1.3: Jednakost polinoma

Polinomi f i g su **jednaki** ako su jednaki kao funkcije, tj. $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Teorem 1.4: Teorem o nul - polinomu

Polinom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, jednak je nul - polinomu ako i samo ako $a_i = 0, i = 0, 1, ..., n$.

Teorem 1.5: O jednakosti polinoma

Polinomi $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ i $g(x) = b_m x^m + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$ su jednaki ako i samo ako $m = n$ i $a_i = b_i, i = 0, 1, ..., n$.

Teorem 1.6: O dijeljenju s ostatkom

Za polinome f i g postoje jedinstveni polinomi q i r tako da

$$f(x) = g(x)\, q(x) + r(x), \ \ deg(r) < deg(g) \ \ ili \ \ r(x) = 0.$$

q i r zovu se kvocijent i ostatak pri dijeljenju f s g. Ako je $r = 0$ tada kažemo da g dijeli f.

Korolar 1.7

Neka je f polinom stupnja n i $a \in \mathbb{R}$. Dijeljenje s $x - a$ daje

$$f(x) = (x - a)\, q(x) + r, \quad r \in \mathbb{R}, \quad deg(q) = n - 1.$$

Definicija 1.8

Ako je za polinom f, za neki $a \in \mathbb{R}$ $f(a) = 0$, tada a zovemo **realni korijen** ili **realna nul - točka** polinoma f.

Uočimo da vrijedi:

$$f(a) = 0 \iff f(x) = (x - a)\, q(x), \textit{za neki polinom } q.$$

Ako za polinom f stupnja n, postoji n realnih nultočaka a_1, a_2, ... , a_n, tada je

$$f(x) = c\,(x - a_1)\,(x - a_2)\,...\,(x - a_n), \textit{za neki } c \in \mathbb{R}.$$

Definicija 1.9

Ako postoji $m \in \mathbb{N}$ i polinom q tako da je

$$f(x) = (x - a)^m\, q(x), \;\; q(a) \neq 0,$$

tada broj m zovemo **kratnost** nultočke a od f.

Teorem 1.10: Vieteove formule

Za $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, neka su $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}$ njegove nultočke. Tada je

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2...x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Lakši zadaci

1. Odredite sumu recipročnih vrijednosti nultočaka jednadžbe
$$\frac{2003}{2004}x + 1 + \frac{1}{x}.$$
2. Neka su a i b nultočke jednadžbe $x^2 - mx + 2 = 0$. Ako su $(a + \frac{1}{b})$ i $(b + \frac{1}{a})$ nultočke jednadžbe $x^2 - px + q = 0$, odredite vrijednost q.
3. Neka su a, b, c, x, y realni brojevi takvi da $a^3 + ax + y = 0$, $b^3 + bx + y = 0$ i $c^3 + cx + y = 0$. Ako su a, b, c svi međusobno različiti, dokažite da im je suma jednaka nuli.
4. Nađite sve realne brojeve a za koje su sva rješenja jednadžbe $x^2 - ax + a = 0$ cjelobrojna.
5. Neka su r_1, r_2 i r_3 korijeni od $x^3 - 2x^2 - 11x + a$ koji zadovoljavaju $r_1 + 2r_2 + 3r_3 = 0$. Odredi sve moguće vrijednosti od a.

Teži zadaci

6. Neka je p polinom stupnja n i neka vrijedi $p(k) = \frac{k}{k+1}$, za $k = 0, ..., n$. Koliko je $p(n+1)$?

7. Odredi sve polinome P takve da im je vodeći koeficijent 1, a svi ostali koeficijenti mogu biti 1 ili -1, uz uvjet da su sve nultočke polinoma realni brojevi.

Rješenja

1. Množenjem s x dobivamo jednadžbu $\frac{2003}{2004}x^2 + x + 1 = 0$. Po Vieteovim formulama znamo da za nultočke a i b vrijedi

$$a + b = -\frac{1}{\frac{2003}{2004}} = -\frac{2004}{2003},$$
$$ab = \frac{1}{\frac{2003}{2004}} = \frac{2004}{2003}.$$

Zato je

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{-\frac{2004}{2003}}{\frac{2004}{2003}} = -1.$$

2. Po Vieteovim formulama za drugi polinom mora vrijediti

$$q = (a + \frac{1}{b})(b + \frac{1}{a}) = ab + 2 + \frac{1}{ab}.$$

Stoga, za odrediti q nam je dovoljno odrediti vrijednost ab. Budući da su a i b nultočke prvog polinoma, po Vieteovim formulama ondje zaključujemo $ab = 2$. Odatle slijedi $q = 2 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$.

3. Definirajmo polinom $f(z) = z^3 + xz + y$. Iz zadanih jednakosti zaključujemo da su a, b, c nultočke od f. Budući da su sve 3 međusobno različite, to su onda sve nultočke polinoma f. Iz tog razloga, po Vieteovim formulama slijedi $a + b + c = -\frac{0}{1} = 0$.

4. Neka su m i n rješenja kvadratne jednadžbe. Po Vieteovim formulama imamo $m + n = mn = a$. U slučaju da je $n = 1$, vrijedilo bi $m + 1 = m$, što je kontradikcija. Dakle, $n \neq 1$ pa iz $m + n = mn$ imamo $m = \frac{n}{n-1}$. Kako za svaki n vrijedi $M(n, n-1) = 1$, jedina su rješenja ona za koja je $n - 1 \in \{1, -1\}$. Dakle, $(m, n) \in (0, 0), (2, 2)$ iz čega su jedina rješenja $a = 0, 4$.

5. Uz relaciju (A) zadanu u zadatku, pomoću Vieteovih formula dobivamo:

$$(B)\ r_1 + r_2 + r_3 = 2$$
$$(C)\ r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = -11,$$

što nam daje sustav 3 jednadžbe s 3 nepoznanice. Oduzimanjem jednadžbe (B) od (A) slijedi $r_2 = -2 - 2r_3$. Uvrštavanjem toga u (B) dobivamo $r_1 = r_3 + 4$. Uvrštavanjem dobivenih izraza za r_1 i r_2 u (C) i uređivanjem dolazimo do kvadratne jednadžbe

$$-3r_3^2 - 8r_3 + 3 = 0,$$

koja se može faktorizirati ili riješiti po formuli te slijede rješenja $r_3 = -3, \frac{1}{3}$. Iz toga dobivamo $r_2 = 4, -\frac{8}{3}$ te $r_1 = 1, \frac{13}{3}$.

Za kraj, trebamo izračunati sve moguće vrijednosti od a. Opet po Vieteovim formulama zaključujemo $-a = r_1r_2r_3$, pa su jedine mogućnosti $a = -1 \cdot 4 \cdot (-3) = 12$ te $a = -\frac{13}{3} \cdot \frac{-8}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{104}{27}$.

6. Primijetimo da iz uvjeta zadatka slijedi da su $k = 0, ..., n$ nultočke polinoma $q(x) = (x+1)p(x) - x$. Kako je p polinom n-tog stupnja, tada je q polinom stupnja $n + 1$ te znamo $n + 1$ njegovu nultočku (što su upravo sve njegove nultočke). Zato ga možemo zapisati u obliku

$$q(x) = a(x - 0)(x - 1)...(x - n). \tag{1}$$

Primijetimo da $p(n + 1)$ možemo izračunati ako uspijemo izračunati $q(n + 1)$. Do toga nam nedostaje samo da odredimo vrijednost od a. Iz definicije od q vidimo da je $q(-1) = (-1 + 1) \cdot p(-1) - (-1) = 1$.S druge strane, uvrštavanjem -1 u izraz (1) dobivamo $q(-1) = a \cdot (-1)^{n+1}(n+1)!$. Stoga, $a = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ i uvrštavanjem $n + 1$ u (1) dobivamo

$$q(n+1) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)!} = (-1)^{n+1},$$

a odatle i

$$p(n+1) = \frac{(-1)^{n+1} + n + 1}{n+2}.$$

7. Zapišimo promatrani polinom kao $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, pri čemu vrijedi $a_k = \pm 1$, za svaki $0 \leq k \leq n-1$. Ako su $r_1, ..., r_n$ nultočke polinoma P, uvrštavanjem u prve 2 Vieteove formule dobivamo

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = r_1 + ... + r_n = -a_{n-1},$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} r_i r_j = r_1 r_2 + ... + r_1 r_n + r_2 r_3 + ... + r_2 r_n + ... + r_{n-1} r_n = a_{n-2}.$$

Budući da je

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right)^2 &= (r_1 + ... + r_n)^2 \\ &= r_1^2 + ... + r_n^2 + 2(r_1 r_2 + ... + r_1 r_n + r_2 r_3 + ... + r_2 r_n + ... + r_{n-1} r_n),\end{aligned}$$

zaključujemo

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} r_i r_j = a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} \leq 3.$$

S druge strane, očito je $\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \geq 0$ jer je to suma kvadrata realnih brojeva. Dakle, budući da je $a_{n-1}, a_{n-2} \in \{-1, 1\}$, mora biti $a_{n-2} = -1$. Nadalje, po Vieteovim formulama također znamo

$$r_1^2 \cdot ... \cdot r_n^2 = (r_1 ... r_n)^2 = ((-1)^n a_0)^2 = 1,$$

jer je $a_0 \in \{-1, 1\}$.

Napokon, budući da su $r_1^2, ..., r_n^2$ nenegativni realni brojevi, možemo primijeniti A-G nejednakost kako bismo zaključili

$$\frac{r_1^2 + ... + r_n^2}{n} \geq \sqrt[n]{(r_1 ... r_n)^2} = 1 \implies \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \geq n.$$

Dakle, zbog ranije pokazanoga mora vrijediti $n \leq 3$. To nam ostavlja mali broj slučajeva, uzmemo li dodatno u obzir da smo pokazali i $a_{n-2} = -1$. Uvrštavanjem dobivamo da su sva rješenja

$$x \pm 1,\ x^2 \pm x - 1,\ x^3 - x \pm (x^2 - 1).$$