J3	Juniorska grupa

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2022./23.

Teleskopiranje

Katja Varjačić

12.11.2022.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

1. Uvod

U ovom predavanju susrest ćemo se s različitim primjerima teleskopiranja kao ideje u rješavanju zadataka.
Ukoliko se do sada niste čuli s ovim pojmom, vjerojatno ste već ranije susreli i riješili zadatak koristeći ideju teleskopiranja.
Općenito, teleskopiranje je ideja, odnosno metoda, koju koristimo kako bismo pojednostavili komplicirаniji izraz drugačijim zapisivanjem dijelova tog izraza.
Zato nije potrebno nikakvo posebno predznanje, već samo prava ideja za drugačiji zapis dobivenog izraza koja će omogućiti "lijepo" pojednostavljivanje.

Primjer 1.1. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Sada je naša suma jednaka

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Primjer 1.2. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n > 10$. Izračunaj sljedeći umnožak:

$$\frac{2^2-1}{2^2+3 \cdot 2+2} \cdot \frac{3^2-1}{3^2+3 \cdot 3+2} \cdot \ldots \cdot \frac{n^2-1}{n^2+3n+2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2+3k+2}.$$

Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{k^2-1}{k^2+3k+2} = \frac{(k-1)(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{k-1}{k+2}.$$

Sada je naš umnožak jednak

$$\frac{2-1}{2+2} \cdot \frac{3-1}{3+2} \cdot \frac{4-1}{4+2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n+2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n+2}.$$

Primijetimo da će se pokratiti svi brojnici i nazivnici koji su veći od 3 i manji od n, tako da ostaje

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n(n+1)(n+2)} = \frac{6}{n(n+1)(n+2)}.$$

Napomena. Uvjet $n > 10$ nam je trebao da ne bismo imali preklapanja brojeva koji se nisu pokratili. Na primjer za $n = 3$ ne postoje brojnici niti nazivnici koji su veći od 3 i manji od n, pa treba zasebno argumentirati takav slučaj.

Lakši zadaci

1. (Ideja parcijalnih razlomaka) Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{2^2+1}{2^2-1} + \frac{3^2+1}{3^2-1} + \ldots + \frac{n^2+1}{n^2-1}.$$

2. (Ideja racionalizacije) Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}.$$

3. (Ideja unakrsnog kraćenja razlomaka) Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Izračunaj sljedeći umnožak:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

4. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n > 10$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{6}{1 \cdot (1+3)} + \frac{6}{2 \cdot (2+3)} + \ldots + \frac{6}{n \cdot (n+3)}.$$

5. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{2}{4 \cdot 1^2 - 1} + \frac{2}{4 \cdot 2^2 - 1} + \ldots + \frac{2}{4 \cdot n^2 - 1}.$$

Umjereni zadaci

6. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $x \in \mathbb{R}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n.$$

7. Dani su realni brojevi $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_n$. Dokaži da je

$$x_0 - x_n + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geqslant 2n.$$

Kada vrijedi jednakost?

8. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!.$$

Malo teži zadaci

9. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$(1^2 + 1 + 1) \cdot 1! + (2^2 + 2 + 1) \cdot 2! + \ldots + (n^2 + n + 1) \cdot n!.$$

10. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

11. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{1}{1^4+1^2+1} + \frac{2}{2^4+2^2+1} + \cdots + \frac{n}{n^4+n^2+1}.$$

Hintovi

1. Izvuci jedinicu iz svakog razlomka i napiši ostatak kao razliku dva razlomka.
2. Racionaliziraj sve razlomke.
3. Preoblikuj svaki član u umnošku tako da koristiš formulu za razliku kvadrata.
4. Zapiši svaki razlomak kao razliku dva razlomka.
5. Iskoristi formulu za razliku kvadrata i zapiši svaki razlomak kao razliku dva razlomka.

Umjereni zadaci

6. Pomnoži i podijeli izraz s $1 - x$.
7. Rastavite izraz $x_0 - x_n$ te primijenite AG nejednakost.
8. Zapiši opći član sume kao razliku dva slična izraza.

Malo teži zadaci

9. Zapiši opći član sume kao razliku dva slična izraza.
10. Ogradi svaki razlomak odozgo s izrazom koji će se moći teleskopirati.
11. Faktoriziraj nazivnik i prikaži razlomak kao razliku dva razlomka.

Rješenja

1. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ vrijedi

$$\frac{k^2+1}{k^2-1} = 1 + \frac{2}{(k-1)(k+1)} = 1 + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}.$$

Danu sumu sada možemo zapisati kao

$$n - 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{n+1} = \boxed{n + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.}$$

2. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k},$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \boxed{\sqrt{n+1} - 1.}$$

3. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ vrijedi

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2},$$

što znači da dani umnožak možemo zapisati kao

$$\frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (n-1)^2 \cdot n \cdot (n+1)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot n^2} =$$

$$\boxed{\frac{n+1}{2n}.}$$

4. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{6}{k(k+3)} = \frac{2}{k} - \frac{2}{k+3},$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$\frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \ldots + \frac{2}{n} - \frac{2}{4} - \frac{2}{5} - \ldots - \frac{2}{n+3} = 2 + 1 + \frac{2}{3} - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3} =$$

$$\boxed{\frac{11}{3} - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3}.}$$

5. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{2}{4k^2-1} = \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1},$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \boxed{1 - \frac{1}{2n+1}.}$$

6. Za $x = 1$ vrijedi

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = 1 + 1 + \ldots + 1 = \boxed{n + 1.}$$

Za $x \neq 1$ možemo danu sumu pomnožiti i podijeliti s $1 - x$, što znači da je ona jednaka

$$\frac{(1-x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)}{1-x} = \frac{1 - x + x - x^2 + x^2 - x^3 + \ldots + x^n - x^{n+1}}{1-x} =$$

$$\boxed{\frac{1 - x^{n+1}}{1-x}.}$$

7. Nejednakost koju trebamo dokazati možemo zapisati kao

$$x_0 - x_1 + x_1 - ... - x_{n-1} + x_{n-1} - x_n + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geqslant 2n.$$

Neka je $a_1 = x_0 - x_1$, $a_2 = x_1 - x_2$, ... $a_n = a_{n-1} - a_n$. Tada je lijeva strana nejednakosti jednaka

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \sum_{i=1}^{n} (a_i + \frac{1}{a_i}).$$

Zbog uređenosti $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ je svaki $a_i > 0$ pa je $a_i + \frac{1}{a_i} \geq 2$, odnosno $\sum_{i=1}^{n} (a_i + \frac{1}{a_i}) \geq 2n$, što je i trebalo pokazati. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_i = 1$ za svaki $i = 1, 2, ...n$, odnosno $x_0 - x_1 = x_1 - x_2 = ... = x_{n-1} - x_n = 1$.

8. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$k \cdot k! = (k+1) \cdot k! - k! = (k+1)! - k!,$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$2! - 1! + 3! - 2! + \ldots + (n+1)! - n! = \boxed{(n+1)! - 1.}$$

9. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(k^2 + k + 1) \cdot k! = ((k+1)^2 - k) \cdot k! = (k+1)^2 \cdot k! - k \cdot k! = (k+1) \cdot (k+1)! - k \cdot k!,$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$2 \cdot 2! - 1 \cdot 1! + 3 \cdot 3! - 2 \cdot 2! + \ldots + (n+1) \cdot (n+1)! - n \cdot n! = \boxed{(n+1) \cdot (n+1)! - 1.}$$

10. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ vrijedi

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

pa je dana suma manja od

$$1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

11. Primijetimo da se nazivnici mogu faktorizirati na sljedeći način:

$$k^4 + k^2 + 1 = (k^2 + 1)^2 - k^2 = (k^2 + k + 1)(k^2 - k + 1).$$

Ono što je zanimljivo kod ove faktorizacije jest da je jedna zagrada zapravo jednaka drugoj zagradi uz translaciju varijable za jedan, odnosno vrijedi

$$k^2 - k + 1 = (k-1)^2 + (k-1) + 1.$$

Tu činjenicu ćemo iskoristiti da bi izveli teleskopiranje. Rastavljajući izraz

$$\frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{k}{(k^2+k+1)(k^2-k+1)}$$

na parcijalne razlomke, dobivamo da vrijedi

$$\frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{1}{2(k^2-k+1)} - \frac{1}{2(k^2+k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{((k+1)-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right),$$

pa je dana suma jednaka

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{(n+1-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right) = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2+2n+2}}.$$