J2	Juniorska grupa

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2022./23.

Kongruencije

Jelena Dujella
29. listopada 2022.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

1. Uvod

Definicija. Ako prirodni broj m dijeli razliku cijelih brojeva a i b, to jest ako $m \mid a-b$, tada kažemo da je a *kongruentno* b *modulo* m i pišemo $a \equiv b \pmod{m}$.

Primjer.

- $2 \equiv 4 \equiv 6 \equiv 8 \equiv 0 \pmod{2}$
- $1 \equiv 3 \equiv 5 \equiv 7 \pmod{2}$
- $9 \equiv 17 \equiv 1 \pmod{8}$
- $4 \equiv 9 \equiv -1 \pmod{5}$
- $15 \equiv 95 \equiv 5465 \equiv 5 \equiv -5 \pmod{10}$

Napomena. Zaključujemo; $a \equiv b \pmod{m}$ ako i samo ako a i b daju isti ostatak pri dijeljenju s m.

Svojstva kongruencija. Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi sljedeće:

- Refleksivnost: $a \equiv a \pmod{n}$
- Simetričnost: $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow b \equiv a \pmod{n}$
- Tranzitivnost: $a \equiv b \pmod{n}$ i $b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$
- Zbrajanje/oduzimanje: $a \equiv b \pmod{n}$ i $c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d \pmod{n}$
- Množenje: $a \equiv b \pmod{n}$ i $c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{n}$
- Potenciranje: $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod{n}$ za $k \in \mathbb{N}$
- Dijeljenje: $ac \equiv bc \pmod{n}$ i $\gcd(c, n) = 1 \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$; općenitije, $ac \equiv bc \pmod{n} \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{n}{\gcd(c,n)}}$

Primjeri i dokazi prethodnih tvrdnji.

- Refleksivnost: očito svaki $m \in \mathbb{N}$ dijeli $0 = a - a$, za svaki cijeli broj a
- Simetričnost: ako $m \in \mathbb{N}$ dijeli $a - b$, onda dijeli i $-(a-b) = b - a$
- Tranzitivnost smo implicitno koristili u gornjem primjeru; naime, $1 \equiv 3 \pmod{2}$, $3 \equiv 5 \pmod{2}$ i $5 \equiv 7 \pmod{2} \Rightarrow 1 \equiv 3 \equiv 5 \equiv 7 \pmod{2}$
- Zbrajanje: ako m dijeli $a - c$ i m dijeli $b - d$, onda m dijeli i $a - c + b - d = (a+b) - (c+d)$; analogno i za oduzimanje
- Množenje: ako m dijeli $a - c$ i m dijeli $b - d$, onda m dijeli i $(a-c)b$ te $(b-d)c$ pa dijeli i $ab - cd = (a-c)b - (b-d)c$
- Potenciranje kongruencija slijedi primijenom matematičke indukcije na prethodnu tvrdnju o množenju kongruencija

- Primjer dijeljenja kongruencija: $45 \equiv 90 \pmod 9$, no $45/9 = 5 \not\equiv 1 \equiv 10 = 90/9 \pmod 9$, ali $45/5 = 9 \equiv 0 \equiv 18 = 90/5 \pmod 9$

Primjer. Iskažimo i dokažimo neka poznata pravila djeljivosti pomoću kongruencija:

- Broj je djeljiv s 2 ako mu je zadnja znamenka parna:
  - $\overline{abcde} \equiv 10000a + 1000b + 100c + 10d + e \equiv e \pmod 2$
- Broj je djeljiv s 3 ako mu je zbroj znamenki djeljiv s 3:
  - $\overline{abcde} \equiv 10000a + 1000b + 100c + 10d + e \equiv a + b + c + d + e \pmod 3$
- Broj je djeljiv s 4 ako je broj sačinjen od njegove zadnje dvije znamenke djeljiv s 4:
  - $\overline{abcde} \equiv 10000a + 1000b + 100c + 10d + e \equiv 10d + e \equiv \overline{de} \pmod 4$
- Broj je djeljiv s 5 ako mu je zadnja znamenka 0 ili 5 ($\equiv 0 \pmod 5$):
  - $\overline{abcde} \equiv 10000a + 1000b + 100c + 10d + e \equiv e \pmod 5$
- Broj je djeljiv s 7 ako mu je dvostruka zadnja znamenka oduzeta od broja sačinjenog od ostatka znamenki djeljiva sa 7:
  - $\overline{abcde} \equiv 10000a+1000b+100c+10d+e \equiv 10(1000a+100b+10c+d)+(1-7)e \equiv 3(\overline{abcd}-2e) \pmod 7 \Rightarrow \overline{abcd} - 2e \equiv 0 \pmod 7$
- Broj je djeljiv s 8 ako je broj sačinjen od njegove zadnje tri znamenke djeljiv s 8:
  - $\overline{abcde} \equiv 10000a + 1000b + 100c + 10d + e \equiv 100c + 10d + e \equiv \overline{cde} \pmod 8$
- Broj je djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenki djeljiv s 9:
  - $\overline{abcde} \equiv 10000a + 1000b + 100c + 10d + e \equiv a + b + c + d + e \pmod 9$
- Broj je djeljiv s 10 ako mu je zadnja znamenka 0 ($\equiv 0 \pmod{10}$):
  - $\overline{abcde} \equiv 10000a + 1000b + 100c + 10d + e \equiv e \pmod{10}$
- Broj je djeljiv s 11 ako mu je alternirajuća suma znamenki djeljiva s 11:
  - $\overline{abcde} \equiv 10000a + 1000b + 100c + 10d + e \equiv e + (10-11)d + (99+1)c + (10-11)(99+1)b + (99+1)(99+1)a \equiv e - d + c - b + a \pmod{11}$

Primjer: kvadratni i kubni ostaci.

- Koji sve ostatak kvadrat prirodnog broja može dati prilikom dijeljenja sa 4?
  - Mogući ostaci pri djeljenju s 4 su 0, 1, 2 i 3
  - Kvadriranjem tih ostataka dobivamo da su mogući ostaci kvadrata prirodnog broja pri djeljenju sa 4: 0, 1, $2^2 \equiv 0$, $3^2 = 9 \equiv 1 \pmod 4$
  - Dakle, kvadrat može dati pri dijeljenju sa 4 samo ostatke 0 (paran broj) ili 1 (neparan broj)
- Slično se dobije da kvadrat prirodnog broja i pri dijeljenju sa 3 može dati samo ostatke 0 ili 1
- Nadalje, pri dijeljenju sa 8, kvadrati prirodnog broja mogu dati ostatke 0 (kvadrat broja djeljivog sa 4), 1 (kvadrat neparnog broja) i 4 (kvadrat broja koji je $\equiv 2 \pmod 4$)

- Kada promatramo kubove prirodnog broja korisno je gledati ostatke pri dijeljenju sa 7 i 9
  - *Vježba:* Odredite kubne ostatke modulo 7 i 9

- *Kada promatramo četvrtu potenciju prirodnog broja korisno je gledati ostatke pri djeljenju sa 5*
  - *Vježba: Odredite ostatke koje četvrta potencija prirodnog broja može dati pri dijeljenju s 5*

Uvodni zadaci

1. Dokažite da zbroj dva neparna kvadrata nikad ne može kvadrat cijelog broja.

2. Nađite ostatak od 6^{1987} pri dijeljenju s 37.

3. Dokažite da 1991 ne može biti jednak zbroju znamenki punog kvadrata.

Zadaci

4. Broj 2^{29} ima 9 znamenki i sve su međusobno različite. Znači njegov zapis sadrži točno jednu od znamenki $0, 1, \ldots, 9$ osim jedne. Bez korištenja kalkulatora ili direktnog množenja, odredite koja znamenka nedostaje.

5. Dokažite da 7 dijeli $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ za svaki prirodni broj n.

6. Dokažite da ako 7 dijeli $a^2 + b^2$ onda 7 dijeli a i 7 dijeli b.

7. Postoje li prirodni brojevi m i n t.d. je $m^3 = 2^n + 15$?

8. Ima li jednadžba $x^2 - 2y^2 = 10$ cjelobrojnih rješenja?

9. Odredite sve troznamenkaste brojeve koji su 5 puta veći od umnoška svojih znamenki.

10. Rastući niz $3, 15, 24, 48, \ldots$ sastoji se od onih višekratnika broja 3 koji su za jedan manji od nekog kvadrata prirodnog broja. Koliki je ostatak 1994-tog člana niza pri dijeljenju s 1000?

11. Pronađite broj svih prirodnih brojeva $1 \leq n \leq 25$ t.d. je $n^2 + 15n + 122$ djeljivo sa 6.

12. Dokažite da 641 dijeli $2^{32} + 1$.

Zadaci s natjecanja

13. **(Županijsko, 2003., 1. razred, 4. zadatak)** Koliko ima četvernoznamenkastih prirodnih brojeva djeljivih sa 7, takvih da se zamjenom znamenaka jedinica i tisućica dobiva broj (ne nužno četveroznamenkast) djeljiv sa 7?

14. **(Županijsko, 2006., 1. razred, B razina, 4. zadatak)** Odredite znamenku jedinica umnoška $(8-5)(8^2-5^2)(8^3-5^3)\ldots(8^{2006}-5^{2006})$.

15. **(Županijsko, 2010., 1. razred, A razina, 4. zadatak)** Neka su a i b dva različita sedmeroznamenkasta broja od kojih svaki sadrži sve znamenke od 1 do 7. Dokaži da a nije djeljiv s b.

16. **(Županijsko, 2010., 2. razred, A razina, 3. zadatak)** Odredite sve proste brojeve p za koje je $2^p + p^2$ također prost broj.

17. **(Državno, 2015., 1. razred, B razina, 5. zadatak)** Dokažite da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ točno jedan od brojeva $A_n = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$ i $B_n = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$ djeljiv s 5.

18. **(Županijsko, 1994., 1. razred, 3. zadatak)** Pokažite da se razlomak $\frac{n^2-n+2}{n^3+2n^2-n+1}$ ne može skratiti ni za koji $n \in \mathbb{N}$.

19. **(Županijsko, 2004., 1. razred, 2. zadatak)** Dokažite da zbroj kvadrata pet uzastopnih prirodnih brojeva ne može biti potpun kvadrat.

20. (Županijsko, 2022., 1. razred, B razina, 2. zadatak) Kojom znamenkom završava broj $2^{2022}+3^{2022}+7^{2022}$?

21. (Državno, 1998., 2. razred, 4. zadatak) Neka su m i n prirodni brojevi, $a=(n+1)^m-n$ i $b=(n+1)^{m+3}-n$.

a) Dokažite da su a i b relativno prosti ako m nije djeljiv s 3.

b) Odredite sve brojeve m i n za koje a i b nisu relaticno prosti.

Hintovi

1. Kvadratni ostaci

2. $6^2 = 36 \equiv -1 \pmod{37}$

3. Kvadratni ostaci + $\pmod{9}$

4. Gledamo $\pmod{9}$

5. Gledamo $\pmod{7}$

6. Gledamo kvadratne ostatke $\pmod{7}$

7. Gledamo $\pmod{7}$

8. Gledamo $\pmod{5}$

9. Gledamo djeljivost s 5

10. Kakvog su oblika članovi niza obzirom na kvadrate prirodnih brojeva (od kojih su za 1 manji)?

11. $n^2 + 15n + 122 \equiv n^2 + 3n + 2 \equiv (n+1)(n+2) \pmod{6}$

12. $641 = 2^7 \cdot 5 + 1 = 2^4 + 5^4$

13. Postaviti kongruencije $\pmod{7}$ koje takvi brojevi trebaju zadovoljavati

14. $\pmod{10}$ + periodičke zadnje znamenke potencija broja 2

15. Koliki je ostatak pri djeljenju s 9 brojeva a i b?

16. Gledamo $\pmod{3}$

17. Periodički ostaci potencija broja 2 pri djeljenju s 5

18. Pogledati recipročnu vrijednost razlomka i onda gledati mogućnosti ovisno o ostatku od n pri dijeljenju s 5

19. Kvadratni ostaci $\pmod{5}$

20. Periodičke zadnje znamenke potencija brojeva 2, 3 i 7

21. Neka je $d = \gcd(a, b)$, gledamo $\pmod{d}$

Rješenja

1. Označimo navedena dva neparna kvadrata sa x^2 i y^2, $x, y \in \mathbb{Z}$. Gledamo kongruencije modulo 4. Kvadrati cijelih brojeva mogu davati jedino ostatke 0 i 1 pri dijeljenju s 4 (prethodni primjer). Budući su x i y (x^2 i y^2) neparni, ne mogu biti $\equiv 0 \pmod 4$, iz čega slijedi da je $x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod 4$, stoga je njihov zbroj $x^2 + y^2 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 4$. A budući kvadrati cijelih brojeva ne mogu davati ostatak 2 pri dijeljenju s 4, slijedi da taj zbroj ne može biti kvadrat.

2. Primijetimo sljedeće: $6^2 \equiv 36 \equiv -1 \pmod{37}$. Sada slijedi da je $6^{1987} \equiv 6^{1986} \cdot 6 \equiv (6^2)^{993} \cdot 6 \equiv (-1)^{993} \cdot 6 \equiv -6 \equiv 31 \pmod{37}$. Dakle, ostatak od 6^{1987} pri dijeljenju s 37 je 31.

3. Promatrati ćemo kongruencije modulo 3. U prethodnom primjeru smo vidjeli da kvadrati mogu biti $\equiv 0$ ili $1 \pmod 3$. Također, vidjeli smo da je svaki cijeli broj kongruentan zbroju svojih znamenki modulo 3. Stoga, ako je 1991 zboj znamenki broja $n \in \mathbb{N}$, vrijedi sljedeće: $n \equiv 1991 \equiv 1 + 9 + 9 + 1 \equiv 2 \pmod 3$. Stoga n ne može biti kvadrat, jer 2 nije mogući ostatak kvadrata pri dijeljenju s 3.

4. Gledamo kongruencije modulo 9. Naime; $2^{29} \equiv (2^6)^4 \cdot 2^5 \equiv 64^4 \cdot 2^5 \equiv 1^4 \cdot 32 \equiv 32 \equiv 5 \pmod 9$. S druge strane, ukoliko označimo sa x znamenku koja se ne pojavljuje u zapisu broja 2^{29}, budući je (prema prethodnom primjeru) svaki broj kongruentan zbroju svojih znamenki modulo 9, imamo: $2^{29} \equiv 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9-x \equiv 9 \cdot 5 - x \equiv -x \pmod 9$. Kombiniranjem prethodna dva rezultata dobivamo da je $-x \equiv 5 \pmod 9$, odnosno $x \equiv -5 \equiv 4 \pmod 9$. Budući je $0 \leq x \leq 9$, slijedi da je znamenka koja se ne pojavljuje 4.

5. Primijetimo da je $3^{2n+1} \equiv 9^n \cdot 3 \equiv 2^n \cdot 3 \pmod 7$ te da je $2^{n+2} \equiv 4 \cdot 2^n \pmod 7$. Stoga je $3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 2^n \cdot 3 + 2^n \cdot 4 \equiv 7 \cdot 2^n \equiv 0 \pmod 7$.

6. Odredimo najprije čemu sve može biti kongruentan kvadrat prirodnog broja modulo 7. Svi mogući ostaci pri dijeljenju sa 7 su 0,1,2,3,4,5 i 6. Kvadriranjem tih ostataka dobivamo moguće ostatke koje kvadrat može davati pri dijeljenju sa 7: $0^2 \equiv 0 \pmod 7$, $1^2 \equiv 1 \pmod 7$, $2^2 \equiv 4 \pmod 7$, $3^2 \equiv 9 \equiv 2 \pmod 7$, $4^2 \equiv 16 \equiv 2 \pmod 7$, $5^2 \equiv 25 \equiv 4 \pmod 7$, $6^2 \equiv 36 \equiv 1 \pmod 7$. Dakle, mogući ostaci su 0,1,4 i 2. Stoga, ako je $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 7$, jedina mogućnost je da je $a^2 \equiv b^2 \equiv 0 \pmod 7$. Dakle, 7 dijeli a^2 i b^2 pa onda i a te b.

7. U prethodnom primjeru smo vidjeli da kubovi mogu biti kongruenti jedino 0, 1 ili 6 modulo 7. S druge strane, imamo da je $2^1 \equiv 2 \pmod 7$, $2^2 \equiv 4 \pmod 7$, $2^3 \equiv 8 \equiv 1 \pmod 7$ i $2^4 \equiv 16 \equiv 2 \pmod 7$. Dakle, kongruencije potencija broja 2 modulo 7 se periodički ponavljaju, periodom 3; idu redom 2, 4, 1. Dakle, $2^n + 15 \equiv 2^n + 1 \equiv 3, 5$ ili $2 \pmod 7$ pa dolazimo do kontradikcije.

8. Gledamo modulo 5. Odredimo ostatke koje kvadrati mogu davati pri dijeljenju s 5. Moguće kongruencije modulo 5 su 0,1,2,3 i 4, kvadriranjem dobivamo: 0,1,4,4 i 1; dakle, to su mogući ostaci kvadrata pri dijeljenju s 5. Dakle, ako ni x ni y nisu djeljivi s 5, nije moguće da je $x^2 - 2y^2 \equiv 10 \equiv 0 \pmod 5$. Dakle, bar jedan od x i y je djeljiv s 5. No, onda slijedi da su oba djeljiva s 5 te je stoga, $x^2 - 2y^2$ djeljivo sa 25, pa je nemoguće da je $x^2 - 2y^2 = 10$. Dakle, jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

9. Imamo sljedeće: $\overline{abc} = 5abc$, to jest $100a + 10b + c = 5abc$. Slijedi $100a + 10b + c \equiv 5abc \pmod 5 \Rightarrow c \equiv 0 \pmod 5$. Nadalje, c je znamenka pa je $0 \leq c \leq 9$ pa je c =0 ili 5. No, c ne može biti nula jer bi tada umnožak znamenki bio nula pa se ne bi radilo o troznamenkastom broju. Dakle, $c = 5$. Uvrstimo to te podijelimo sa 5 pa dobivamo sljedeće: $20a + 2b + 1 = 5ab$. Stoga je $20a + 2b + 1 \equiv 5ab \pmod 5 \Rightarrow 2b + 1 \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow 2b \equiv -1 \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow b \equiv 2 \pmod 5$. Zaključujemo da je b 2 ili 7. Ako je $b = 2$, onda je $20a + 5 = 10a \Rightarrow 10a + 5 = 0$, što je nemoguće. Ako je $b = 7$, onda je $20a + 15 = 35a \Rightarrow 15a = 15 \Rightarrow a = 1$. Dakle, dobivamo rješenje $\overline{abc} = 175$.

10. Članovi niza su oblika $n^2 - 1$, ali takvi da 3 dijeli $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$. Budući je 3 prost, slijedi da je to moguće jedino ako je $n \equiv \pm 1 \pmod 3$, to jest ukoliko je $n = 3k+1$ ili $n = 3k-1$, za $k \in \mathbb{N}$. Primijetimo da $n = 3k+1$ producira članove niza na parnim mjestima, a $n = 3k-1$ na neparnim mjestima. Dakle, zanima nas 997. član niza $n = 3k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Imamo: $(3(997)+1)^2 - 1 \equiv (3 \cdot (-3)+1)^2 - 1 \equiv (-9+1)^2 - 1 \equiv (-8)^2 - 1 \equiv 63 \pmod{1000}$. Dakle, traženi ostatak je 63.

11. Primijetimo da je $n^2 + 15n + 122 \equiv n^2 + 3n + 2 \equiv (n+1)(n+2) \pmod 6$. Dakle, želimo da 6 dijeli $(n+1)(n+2)$. Vidimo da će $(n+1)(n+2)$ biti djeljivo s 3, čim n nije kongruentan 0 modulo 3 (nije djeljiv s 3). Također, vidimo da je uvijek točno jedan od $(n+1)$ i $(n+2)$ paran. Dakle, traženi n-ovi će biti svi brojevi između 1 i 25, koji nisu djeljivi s 3. Takvih ima $25 - \lfloor 25/3 \rfloor = 25 - 8 = 17$.

12. Primijetimo da je $641 = 2^7 \cdot 5 + 1 = 2^4 + 5^4$. Stoga je $2^7 \cdot 5 \equiv -1 \pmod{641}$ i $2^4 \equiv -5^4 \pmod{641}$. Sada $2^7 \cdot 5 \equiv -1 \pmod{641}$ povlači da je $2^{28} \cdot 5^4 \equiv 1 \pmod{641}$. Taj rezultat, uz $2^4 \equiv -5^4 \pmod{641}$, povlače da je $-2^4 \cdot 2^{28} \equiv 1 \pmod{641}$. Dakle, 641 dijeli $2^{32} + 1$.

13. Označimo navedeni četveroznamenkasti broj sa $\overline{abcd} = n$ te sa $m = \overline{dbca}$. Želimo da je $n \equiv m \equiv 0 \pmod 7$. Dakle, imamo: $1000a + 100b + 10c + d \equiv 1000d + 100b + 10c + a \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow 999a \equiv 999d \pmod 7 \Rightarrow (3^3 - 1)a \equiv (3^3 - 1)d \pmod 7 \Rightarrow 26a \equiv 26d \pmod 7 \Rightarrow a \equiv d \pmod 7$. Tada, slijedi i: $1000a + 100b + 10c + a \equiv (3^3+1)a + 3^2 b + 3c \equiv 28a + 2b + 3c \equiv 2b + 3c \equiv 0 \pmod 7$. Sada, odredimo koliko ima brojeva s traženim svojstvom (uvjeti su nam $2b + 3c \equiv 0 \pmod 7$ te $a \equiv d \pmod 7$). Za a imamo 9 opcija. Ukoliko je a 1, 2, 7, 8 ili 9, onda za d imamo po 2 opcije (1/8, 2/9, 7/0, 8/1, 9/2), u ostalim slučajevima je d jednoznačno određen($d = a$). To je ukupno $5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 14$ opcija za kombinacije a i d, koji su neovisni o b i c (prema uvjetima). Za b i c imamo uvjet: $2b + 3c \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow 2b \equiv -3c \equiv 4c \pmod 7 \Rightarrow b \equiv 2c \pmod 7$. Dakle, ako je b 1,2,3,4,5,6,7,8,9 ili 0, onda $2c$ može redom biti 1 ili 8, 2 ili 9, 3, 4, 5, 6, 0 ili 7, 8 ili 1, 9 ili 2 te 0. Stoga je u tim slučajevima c redom: 4, 1 ili 8, 5, 2 ili 9, 6, 3, 7 ili 0, 4, 1 ili 8, 0 ili 7. Dakle, za kombinacije b i c, imamo $5 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 15$ mogućnosti. Ukupno traženih brojeva ima $15 \cdot 14 = 210$.

14. Najprije, primijetimo da je $5^k \equiv 5 \pmod{10}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Nadalje, $8^k \equiv (-2)^k \pmod{10}$. Imamo: $2^1 \equiv 2 \pmod{10}$, $2^2 \equiv 4 \pmod{10}$, $2^3 \equiv 8 \pmod{10}$, $2^4 \equiv 6 \pmod{10}$, $2^5 \equiv 2 \pmod{10}$. Dakle, zadnja znamenka (ostatak pri djeljenju s 10) potencija broja 2 se periodički mijenja, sa periodom 4. Redom, ide $2(k \equiv 1 \pmod 4)$, $4(k \equiv 2 \pmod 4)$, $8(k \equiv 3 \pmod 4)$ i $6(k \equiv 0 \pmod 4)$. Također, $2006 = 501 \cdot 4 + 2$. Dakle, traženi broj je kongruentan $\prod_{k=0}^{500}(((-2)^{4k+1} - 5)((-2)^{4k+2} - 5)((-2)^{4k+3} - 5)((-2)^{4k+4} - 5)) \cdot ((-2)^{2005} - 5)((-2)^{2006} - 5) \equiv \prod_{k=0}^{500}((-7)(-1)(-13)1) \cdot (-7)(-1) \equiv \prod_{k=0}^{500}((-7)(-3)) \cdot 7 \equiv (-1)^{501} \cdot 7 \equiv -7 \equiv 3 \pmod{10}$ pa je zadnja znamenka 3.

15. Pretpostavimo suprotno, da postoji neki $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ takav da je $a = n \cdot b$. Budući je broj kongruentan zbroju svojih znamenki modulo 9 slijedi da je $a \equiv b \equiv 1+2+3+4+5+6+7 \equiv 7 \cdot 4 \equiv 1 \pmod 9$. Dakle, $a \equiv n \equiv 1 \pmod 9$. No, budući su a i b različiti te imaju isti broj znamenki, n mora biti $2 \leq n \leq 9$ pa dolazimo do kontradikcije. Dakle, a nije djeljiv s b.

16. Županijsko, 2010., 2. Razred, A razina, 3. Zadatak

17. Primijetimo da potencije broja 2 daju periodičke ostatke pri djeljenju s 5. Naime, vrijedi: $2^1 \equiv 2 \pmod 5$, $2^2 \equiv 4 \pmod 5$, $2^3 \equiv 3 \pmod 5$, $2^4 \equiv 1 \pmod 5$, $2^5 \equiv 2 \pmod 5$ pa se dalje ponavljaju s periodom 4; redom $2(k \equiv 1 \pmod 4)$, $4(k \equiv 2 \pmod 4)$, $3(k \equiv 3 \pmod 4)$ i $1(k \equiv 0 \pmod 4)$. Stoga imamo 4 mogućnosti:

- Ako je $n \equiv 0 \pmod 4$, onda je $2n + 1 \equiv n + 1 \equiv 1 \pmod 4$ pa je $A_n \equiv 2 - 2 + 1 \equiv 1 \pmod 5$, a $B_n \equiv 2 + 2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$.
- Ako je $n \equiv 1 \pmod 4$, onda je $2n + 1 \equiv 3 \pmod 4$, a $n + 1 \equiv 2 \pmod 4$ pa je $A_n \equiv 3 - 4 + 1 \equiv 0 \pmod 5$, a $B_n \equiv 3 + 4 + 1 \equiv 3 \pmod 5$.

- Ako je $n \equiv 2 \pmod 4$, onda je $2n + 1 \equiv 1 \pmod 4$, a $n + 1 \equiv 3 \pmod 4$ pa je $A_n \equiv 2 - 3 + 1 \equiv 0 \pmod 5$, a $B_n \equiv 2 + 3 + 1 \equiv 1 \pmod 5$.
- Ako je $n \equiv 3 \pmod 4$, onda je $2n + 1 \equiv 3 \pmod 4$, a $n + 1 \equiv 0 \pmod 4$ pa je $A_n \equiv 3 - 1 + 1 \equiv 3 \pmod 5$, a $B_n \equiv 3 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod 5$.

Dakle u svim slučajevima je točno jedan od A_n i B_n djeljiv s 5.

18. Županijsko, 1994., 1. razred, 3. zadatak

19. Županijsko, 2004., 1. razred, 2. zadatak

20. Županijsko, 2022., 1. razred, B razina, 2. zadatak

21. Državno, 1998., 2. razred, 4. zadatak