S1	Seniorska grupa

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2022./23.

Tetivni četverokuti

Leonarda Vuković

15.10.2022.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

1. Uvod

Četverokut kojem se može opisati kružnica zove se tetivni četverokut. Drugim riječima, tetivni četverokuti su konveksni četverokuti čija sva četiri vrha leže na istoj kružnici. Njihove stranice ujedno su tetive iste kružnice. Za rješavanje geometrijskih zadataka na natjecanjima treba se upoznati sa svojstvima tetivnih četverokuta i naučiti kako se koriste.

Teorem 1.1: Teorem o obodnom i središnjem kutu

Središnji kut nad tetivom kružnice dvostruko je veći od obodnog kuta nad tom istom tetivom.

Teorem 1.2: Talesov teorem

Obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.

Teorem 1.3: Teorem o kutu između tangente i tetive

Kut između tetive kružnice i tangente na tu kružnicu u jednoj od krajnjih točaka tetive jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.

Definicija 1.4

Tetivni četverokut je četverokut kojemu se može opisati kružnica.

Karakterizacije *(tetivni četverokuti imaju ova svojstva, ali vrijedi i obrat, četverokut za koji vrijedi neko od navedenih svojstava je tetivan)*:

- zbroj nasuprotnih kuteva je $180°$
- simetrale stranica četverokuta sijeku se u jednoj točki (ta točka je onda središte opisane kružnice)
- U četverokutu $ABCD$ vrijedi neka od ovih jednakosti kuteva (a ako vrijedi neka, vrijedi i svaka):
  - $|\angle ABD| = |\angle ACD|$
  - $|\angle ADB| = |\angle ACB|$
  - $|\angle BAC| = |\angle BDC|$
  - $|\angle CAD| = |\angle CBD|$
- **(Ptolomejev poučak)** U tetivnom četverokutu $ABCD$ vrijedi sljedeće:

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$$

Lakši zadaci

1. Dokažite "Teorem o kutu između tangente i tetive".

2. Točke A, B, C, D i E leže tim redom na kružnici čiji je promjer $\overline{AE}$. Odredite $|\angle ABC|+|\angle CDE|$.

3. U trokutu ABC neka su nožišta visina iz B i C redom točke D i E. Dokažite da je tangenta na opisanu kružnicu trokuta ABC u točki A paralelna s pravcem DE.

4. U tetivnom četverokutu $ABCD$, neka okomica na AB u točki B siječe pravac CD u E, i neka okomica na CD u točki D siječe pravac AB u točki F. Dokažite da je $AC \parallel EF$.

5. U šiljastokutnom trokutu ΔABC točka M je nožište visine iz vrha A, a točka N nožište visine iz vrha B. Ako je $|AN| = |NM|$, dokaži da središte upisane kružnice trokuta ΔABC leži na visini $\overline{BN}$.

6. Neka je ABC jednakokračni trokut s osnovicom $\overline{BC}$. Simetrala kuta u vrhu B siječe krak $\overline{AC}$ u točki P. Ako kružnica koja prolazi točkama B, C i P raspolavlja krak $\overline{AB}$, odredite veličine kutova trokuta ABC.

7. Točke E i F su redom polovišta stranica $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ kvadrata $ABCD$. Pravci BE i CF sijeku se u točki P. Dokažite da je $|AP| = |AB|$.

8. Neka je ABC šiljastokutni trokut takav da je $|BC| > |AC|$. Simetrala dužine $\overline{AB}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P, a pravac AC u točki Q. Točka R je nožište okomice iz točke P na stranicu $\overline{AC}$, a točka S je nožište okomice iz točke Q na pravac BC. Dokažite da pravac RS raspolavlja dužinu $\overline{AB}$.

Teži zadaci

9. Dan je tetivni četverokut $ABCD$. Simetrala dužine $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki E. Kružnica koja prolazi točkom E, vrhom C i polovištem F stranice $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{CD}$ u točki G. Dokažite da je $AD \perp FG$.

10. Upisana kružnica trokuta ABC dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ u točkama E i F. Neka je P sjecište pravca EF i simetrale kuta $\angle ABC$. Dokaži da je $\angle BPC = 90°$.

11. Dužina $\overline{AB}$ je promjer kružnice sa središtem u točki O. Na kružnici je dana točka C takva da je $OC \perp AB$. Na kraćem luku $\overset{\frown}{BC}$ odabrana je točka P. Pravci CP i AB sijeku se u točki Q, a točka R je sjecište pravca AP i okomice kroz Q na AB. Dokažite da je $|BQ| = |QR|$.

12. Dan je četverokut $ABCD$. Opisana kružnica trokuta ABC siječe stranice CD i DA redom u točkama P i Q, a opisana kružnica trokuta CDA stranice AB i BC redom u R i S. Pravci BQ i BP sijeku pravac RS redom u točkama M i N. Dokažite da točke M, N, P i Q leže na istoj kružnici.

13. Neka je ABC šiljastokutan trokut. Pravci l_1 i l_2 su okomiti na AB i redom prolaze točkama A i B. Neka je M poloviše stranice $\overline{AB}$. Okomice iz M na AC i BC sijeku pravce l_1 i l_2 redom u točkama E i F. Ako je D sjecište EF i MC, dokaži da je $\angle ADB = \angle EMF$.

14. Neka je ABC šiljastokutan trokut i neka su D i E redom polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Neka je F točka takva da je D polovište dužine $\overline{EF}$. Točka G je na segmentu $\overline{CD}$ tako da polovište od $\overline{BG}$ leži na kružnici Γ opisanoj trokutu FDB. Označimo sa H drugo sjecište kružnice Γ i FC. Pokaži da je četverokut $BHGC$ tetivan.

Hintovi

1. Iskoristite obodni i središnji kut te jednakokračnost trokuta.

2. Iskoristite prvu karakterizaciju tetivnih četverokuta i Talesov teorem.

3. Dovoljno je pokazati da je kut između tangente u A i AB jednak kutu $\angle AED$.

4. Koji još tetivni četverokut postoji na slici, a u priču uvodi točke E, F?

5. *HINT 1:* Dovoljno je dokazati da je N poloviste stranice $\overline{AC}$?
HINT 2: Kako biste pokazali da je BN simetrala $\angle ABC$?

6. Pokažite da je trokut $\triangle PMB$ jednakokračan.

7. *HINT 1:* Uočavate li neke sukladne trokute? Pokušajte primijeniti SKS poučak o sukladnosti.
HINT 2: ABPF je tetivan.

8. Ekvivalentno je dokazati $\angle RSP = \angle MSP$.

9. Neka je H sjecište pravaca AD i FG. Koja dva četverokuta su tetivna? Promotrite trokut HDG.

10. Tetivni četverokut i *angle chase*.

11. *HINT 1:* Što znate o trokutu OCB? Pokušajte raditi s konkretnim kutevima $(45°, 90° \dots)$. *HINT 2:* Dokažite da je četverokut $PBQR$ tetivan.

12. *HINT 1:* Neka su $\angle AQB = \alpha$ i $\angle DQP = \beta$. Koje sve kuteve mogu dobiti iz njih? *HINT 2:* Glavna ideja je pokazati da $\angle PQM + \angle PNM = 180°$ tj. $\angle AQB + \angle DQP = \angle PNM$.

13. *HINT 1:* $\triangle MGH \sim \triangle MEF$
HINT 2: $CM \perp EF$, a iz toga možemo dobiti i tetivnost nekih četverokuta.

14. Ako sa I označimo drugo sjecište kružnice Γ i BG, pokažite da je $FI \parallel CD$.

Rješenja

1. Označimo s $\overline{AB}$ danu tetivu, i neka dana tangenta dira kružnicu u točki A. Neka je $\angle ACB$ obodni kut kružnice (kojeg označimo s α), te S središte kružnice. Po poučku o obodnom i središnjem kutu je $\angle ASB = 2\alpha$, pa budući da je trokut ASB jednakokračan dobijemo da je $\angle SAB = (180° - 2\alpha)/2 = 90° - \alpha$. Kako je kut izmedu dužine OA i tangente $90°$, dobijemo da je kut između tetive i tangente jednak upravo α.

2. 2016., opć 2A, 4.

Označimo $\angle ABC = x$ i $\angle CDE = y$. Četverokut $ABCE$ je tetivan, pa je zato $\angle AEC = 180° - x$. Analogno zaključujemo da je $\angle CAE = 180° - y$. Kut $\angle ACE$ je pravi jer je to obodni kut nad promjerom kružnice. Dakle, mora vrijediti da je $\angle CAE + \angle AEC = 90°$, odnosno

$$180° - y + 180° - x = 90°,$$

iz čega slijedi $x + y = 270°$.

3. Uočimo da je $\angle CDB = \angle CEB = 90°$, pa zaključujemo da je četverokut $BCDE$ tetivan. Tvrdnju zadatka pokazat ćemo ako pokažemo jednakost kuteva uz pravac koji bi bio transverzala. Pokažimo da je kut između tangente u A i AB jednak kutu $\angle AED$.

Po teoremu o kutu između tetive i tangente je kut između tangente u točki A i pravca AB jednak $\angle ACB$, što je obodni kut nad tetivom $\overline{AB}$. Usto, jer je $BCDE$ tetivan zaključujemo da je $\angle DCB = 180° - \angle BED = \angle AED$. Sada zbog $\angle ACB = \angle AED$ slijedi tvrdnja zadatka.

4. Zbog $\angle FDE + \angle FBE = 90° + 90° = 180°$, $BEDF$ je tetivni četverokut. Imamo da je $\angle DCA = \angle DBA = \angle DBF = \angle DEF$, iz čega slijedi da su pravci AC i EF zaista usporedni.

5. 2012., opć 2A, 8.

Kako je $|AN| = |NM|$, točka N leži na simetrali dužine AM, a kako je trokut AMC pravokutan zaključujemo da je točka N polovište njegove hipotenuze AC. Dakle, nožište visine iz vrha B je polovište nasuprotne stranice. To znači da je trokut ABC jednakokračan i vrijedi $|AB| = |BC|$. Sada je jasno da je pravac BN simetrala kuta $\angle ABC$ pa središte upisane kružnice trokuta leži na njemu.

6. Označimo s M polovište dužine $\overline{AB}$, te neka je $\angle ABC = \beta$. Četverokut $BCPM$ je tetivan, pa kako je pravac BP simetrala kuta $\angle ABC$, vrijedi $\angle PBM = \angle PBC = \frac{\beta}{2}$, te je $|PM| = |PC|$. Usto, iz jednakosti obodnih kuteva imamo da je $\angle MPB = \angle MCB = \beta - \angle PCM = \beta - \angle PBM = \frac{\beta}{2}$. Dakle, i trokut PMB je jednakokračan, tj. $|PM| = |BM|$. No, kako je M polovište $\overline{AB}$, $|BM| = |AM| = \frac{|AB|}{2}$, a kako je $|PC| = |BM|$ i $|AB| = |AC|$, vrijedi $|AP| = |AM|$. Sada smo jasno dobili da je trokut AMP jednakostraničan, pa je $\angle BAC = 60°$. Stoga zaključujemo da su svi kutevi u trokutu ABC jednaki $60°$.

7. Pokazat ćemo da je četverokut $ABPF$ tetivan. Naime, po S-K-S poučku o sukladnosti je $\triangle BCE \cong \triangle CDF$, pa je $\angle ABP = 90° - \angle CBE = \angle BEC = \angle CFD = 180° - \angle AFP$, što povlači tetivnost. Nadalje, po S-K-S poučku o sukladnosti vrijedi i $\triangle BAF \cong \triangle CDF$, pa je $\angle CFD = \angle BFA$. Kako je četverokut $ABPF$ tetivan, slijedi $\angle BPA = \angle BFA$, pa kada spojimo sve što imamo vidimo da je $\angle BPA = \angle ABP$, zbog čega je $|AP| = |AB|$.

8. 2018., žup 4A, 3.

Iz uvjeta $|BC| > |AC|$ slijedi da se točka Q nalazi na produžetku dužine $\overline{AC}$ preko točke C, a točka S na produžetku dužine $\overline{BC}$, također preko točke C. Označimo s M polovište dužine $\overline{AB}$.

Budući da je $\angle BMQ = \angle BSQ = 90°$, četverokut $BQSM$ je tetivan. Zato vrijedi $\angle MSB = \angle MQB$. Budući da je $\angle PRQ = \angle PSQ = 90°$, zaključujemo da je četverokut $PQSR$ tetivan. Iz toga zaključujemo da je $\angle RQP = \angle RSP$. Budući da je pravac MQ simetrala dužine $\overline{AB}$, slijedi da je $\angle AQM = \angle MQB$. Vrijedi $\angle RSP = \angle RQP = \angle AQM = \angle MQB = \angle MSB = \angle MSP$. Dakle, točke S, R i M su kolinearne, što je i trebalo pokazati.

9. 2011., drž 1A, 4.

Označimo s H sjecište pravaca AD i FG, te $\angle HDG = \alpha$. Pokazat ćemo da $\angle HGD = 90° - \alpha$, iz čega će, promatrajući trokut HDG, slijediti tvrdnja zadatka. Četverokut $ABCD$ je tetivan, pa je $\angle ABC = \angle HDG = \alpha$. Vrijedi da je $BEF \cong CEF$ (S-K-S poučak), pa je $\angle BCE = \angle CBE = \alpha$. Sada, kako je četverokut $EFCG$ tetivan, vrijedit će $\angle EGF = \angle ECF = \alpha$ i $\angle EGC = 180° - \angle EFC = 90°$. Sada je $\angle HGD = \angle CGF = \angle EGC - \angle EGF = 90° - \alpha$, što smo i željeli.

10. video objašnjenje uz MNM online predavanje

11. Trokut OCB je jednakokračan pravokutan trokut jer su $\overline{OB}$ i $\overline{OC}$ polumjeri kružnice sa središtem u točki O. Zato je $\angle CBA = \angle CBO = 45°$. Obodni kutovi $\angle CPA$ i $\angle CBA$ nad tetivom $\overline{CA}$ su jednaki, pa je $\angle QPR = \angle CPA = \angle CBA = 45°$. Prema Talesovom teoremu kut $\angle APB$ je pravi kut pa je i $\angle BPR$ pravi.

Četverokut $BQRP$ je tetivan jer ima dva prava nasuprotna kuta ($\angle RQB$ i $\angle BPR$) pa su obodni kuovi nad tetivom $\overline{QR}$ jednaki, odnosno $\angle QBR = \angle QPR = 45°$. Zato je $\angle BRQ = 180° - \angle RQB - \angle QBR = 180° - 90° - 45° = 45°$, pa je $\angle BRQ = 45° = \angle QBR$ i vrijedi $|BQ| = |QR|$.

12. Označimo $\angle AQB = \alpha$ i $\angle DQP = \beta$ (onda je $\angle PQM = 180° - \alpha - \beta$). Koristeći jednakosti obodnih kuteva i svojstva tetivnih četverokuta dobijemo da vrijede sljedeća 2 niza jednakosti:

$$\alpha = \angle AQB = \angle ACB = \angle ACS = 180° - \angle ARS = \angle BRS$$
$$\beta = \angle DQP = 180° - \angle AQP = \angle ABP.$$

Sada je $\angle PNM$ vanjski kut trokuta RBN, pa je on jednak $\alpha + \beta = 180° - \angle PQM$, što je i trebalo dokazati.

13. JBMO 2015., zadatak 3

14. EMC 2020., J1