J1	Juniorska grupa

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2022./23.

Angle chase

Mislav Brnetić
15. listopada 2022.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

1. Uvod

Angle chase je čest naziv za metodu rješavanja geometrijskih zadataka koja uključuje traženje veličina nepoznatih kutova korištenjem različitih svojstava kutova.

Kod rješavanja geometrijskih zadataka poželjno je primijetiti odnose kutova, s obzirom da iz njih mogu slijediti neki bitni zaključci.

U ovom predavanju upoznat ćemo se s nekim osnovnim svojstvima kutova, primijeniti ih u različitim zadacima i upoznati se s nekim idejama rješavanja zadataka koji uključuju traženje nepoznatih kutova,

Prisjetimo se kako vrijede sljedeće tvrdnje:

- **vršni kutovi** su jednaki
- **sukuti** su suplementarni (tj. zbroj im je $180°$)
- **kutovi s paralelnim kracima** (kutevi uz presječnicu) su jednaki
- **kutovi s okomitim kracima** su ili jednaki ili suplementarni
- zbroj unutarnjih kutova u trokutu je $180°$, u četverokutu $360°$, a u općenitom mnogokutu s n stranica $(n-2)\cdot 180°$ (ako je mnogokut pravilan, svi unutarnji kutovi su mu jednaki pa je svaki veličine $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$)
- zbroj vanjskih kutova svakog mnogokuta je $360°$
- u jednakostraničnom trokutu svi kutovi su jednaki, a u jednakokračnom su kutovi uz osnovicu jednaki
- ako su dva trokuta sukladna, odgovarajuće stranice su im jednake duljine i odgovarajući kutovi jednaki
- ako su dva trokuta slična, duljine odgovarajućih stranica su im u istom omjeru, a kutovi su im jednaki
- kut između tangente na kružnicu i polumjera u diralištu je pravi

Još neka bitna svojstva iskazat ćemo u narednim teoremima i uvodnim zadacima.

Definicija 1.1

Neka je k kružnica sa središtem u S te A, B i C točke na toj kružnici.
Tada kut $\angle ACB$ nazivamo **obodnim kutom** nad tetivom $\overline{AB}$, a kut $\angle ASB$ **središnjim kutom** nad tetivom $\overline{AB}$.

Teorem 1.2: O obodnom i središnjem kutu

Središnji kut nad tetivom kružnice dvostruko je veći od obodnog kuta nad tom istom tetivom.

Teorem 1.3: Talesov poučak

Ako su A, B i C točke na kružnici te $\overline{AB}$ promjer, tada je kut $\angle ACB$ pravi.

Dokaz. Slijedi direktno iz Teorema 1.2 za promjer kružnice. □

Napomena. Vrijedi obrat Talesovog poučka, tj. ako je za neke točke A, B i C kut $\angle ACB$ pravi, tada C leži na kružnici čiji je promjer $\overline{AB}$.

Teorem 1.4: Sukladnost trokuta

Dva su trokuta sukladna ako vrijedi nešto od sljedećeg:

- stranice su im jednake duljine (SSS)
- dvije stranice su im jednake duljine te je kut između njih jednake veličine (SKS)
- jedna stranica im je jednake duljine te su dva kuta jednake veličine (KSK)
- dvije stranice su im jednake duljine te je kut nasuprot dužoj jednake veličine (SSK)

Teorem 1.5: Sličnost trokuta

Dva su trokuta slična ako vrijedi nešto od sljedećeg:

- dva kuta su im jednake veličine (KK)
- dvije stranice su im u istom omjeru te je kut između njih jednake veličine (SKS)
- stranice su im u istom omjeru (SSS)

Uvodni zadaci

1. Dokažite da je vanjski kut u vrhu trokuta jednak zbroju preostala dva unutarnja kuta trokuta.
2. Dokažite da se središte trokutu upisane kružnice nalazi na sjecištu simetrala svih kutova trokuta.
3. Dokažite da je središte trokutu opisane kružnice nalazi na sjecištu simetrala svih stranica trokuta.
4. Dokažite da je srednjica trokuta (dužina koja spaja polovišta dviju stranica) paralelna trećoj stranici i jednaka njenoj polovici.
5. Zadan je $\triangle ABC$ i tangenta na njemu opisanu kružnicu kroz točku B. Dokažite da je tada kut između te tangente i tetive $\overline{BC}$ jednak obodnom kutu $\angle BAC$ (*kut između tangente i tetive*).
6. Neka je $\triangle ABC$ trokut u kojem je $\angle CAB = 20°$ i neka je D polovište stranice $\overline{AB}$. Ako je $\angle CDB = 40°$, odredite veličinu kuta $\angle ABC$.

Zadaci

7. Dana su dva okomita promjera kružnice, $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Na luku AC odabrana je proizvoljna točka E. Dokažite da je ED simetrala kuta $\angle BEA$.
8. Neka je $\overline{AB}$ promjer kružnice k i neka su P, Q na luku AB. Neka je M presjek pravaca AP i BQ, a N presjek pravaca AQ i BP. Dokažite da je $MN \perp AB$.
9. Zadana je kružnica k, točka T izvan nje, te dvije različite tangente iz T na kružnicu koje kružnicu diraju u točkama A i B. Dokažite da je $|TA| = |TB|$.

10. Dan je pravokutni trokut $\triangle ABC$ s pravim kutom pri vrhu C i stranicama duljina $|AB| = 26$, $|BC| = 24$. U njega je upisana polukružnica s promjerom na stranici $\overline{BC}$ koja sadrži točku C. Polukružnica dira stranicu $\overline{AB}$. Koliki je polumjer upisane polukružnice?

11. Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC, te neka je N nožište visine iz vrha A. Dokažite da je $\angle BAN = \angle CAO$.

12. Neka je dužina $\overline{AD}$ promjer kružnice, a B i C točke na kružnici takve da se dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku unutar kružnice pod kutom od $60°$. Ako je točka S središte kružnice, dokažite da je trokut BCS jednakostraničan.

13. Neka je točka D sjecište stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC i simetrale kuta trokuta u vrhu C. Kolike su veličine kutova trokuta ABC ako se podudaraju središte upisane kružnice trokuta ADC i središte opisane kružnice trokuta ABC?

14. Neka je D točka na stranici $\overline{AC}$ trokuta ABC takva da pravac AB dira opisanu kružnicu trokuta BCD u točki B i neka pritom vrijedi $|BD| = |CD|$. Dokažite da je pravac BD simetrala kuta $\angle CBA$.

15. U trokutu ABC je $\angle ABC = 45°$. Na stranici $\overline{BC}$ dana je točka D tako da je $|CD| = 2|BD|$ i $\angle BDA = 120°$. Odredite veličine kutova trokuta ABC.

16. Neka je ABC trokut u kojem je najdulja stranica $\overline{BC}$, a kut $\angle BCA$ tri puta veći od kuta $\angle ABC$. Simetrala vanjskog kuta kod vrha A siječe pravac BC u točki A_0, a simetrala vanjskog kuta kod vrha B siječe pravac AC u točki B_0. Ako je $|AA_0| = |BB_0|$, odredite kutove danog trokuta.

17. Dvije kružnice sijeku se u točkama P i Q. Ako dva pravca koja prolaze kroz točku Q sijeku prvu kružnicu u točkama A i B, a drugu kružnicu u točkama C i D, dokaži da su trokuti PAB i PCD slični.

18. Neka je $ABCD$ četverokut takav da je $\angle ABC + \angle CDA = 180°$. Dokažite da se tom četverokutu može opisati kružnica.

Hintovi

1. Koristite činjenicu da je zbroj unutarnjih kutova trokuta 180°.
2. Kolika je udaljenost od neke točke na simtrali kuta do krakova kuta?
3. Kolika je udaljenost od neke točke na simtrali stranice do krajnjih točaka stranice?
4. Primijenite SKS poučak o sličnosti.
5. Koristite činjenicu da je tangenta okomita na polumjer kružnice.
6. Odredite sve kutove i primijetite da su neki trokuti jednakokračni.
7. Primijenite teorem o obodnom i središnjem kutu.
8. Koristite Talesov poučak.
9. Ako je S središte kružnice, dokažite da su $\triangle TAS$ i $\triangle TBS$ sukladni.
10. Koristite tvrdnju iz zadatka 9.
11. Promatrajte trokut $\triangle AOC$.
12. Ako je E sjecište $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, promatrajte $\triangle AED$.
13. Primijetite da je središte upisane i opisane kružnice sjecište simetrala kutova.
14. Koristite teorem o obodnom i središnjem kutu te činjenicu da je tangenta okomita na polumjer.
15. Spustite okomicu iz vrha C na AD i promotrite $\triangle CED$.
16. Dokažite da je trokut $\triangle ABA_0$ jednakokračan.
17. Koristite da su obodni kutovi nad istom tetivom jednaki te primijetite tetivne četverokute.
18. Opišite kružnicu $\triangle ABC$ te promatrajte središnje i obodne kutove.

Rješenja

1. Označimo unutarnje kutove trokuta s α, β, γ i traženi vanjski kut trokuta s γ'.

Vrijedi $\gamma' = 180° - \gamma$ (vanjski kut trokuta).

Vrijedi $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ iz čega uvrštavanjem u gornju jednakost slijedi $\gamma' = \alpha + \beta$ što je i trebalo dokazati.

2. MNM online predavanja - Karakteristične točke trokuta, Teorem 2.

3. MNM online predavanja - Karakteristične točke trokuta, Teorem 1.

4. Promotrimo početni trokut te trokut određen jednim od vrhova početnog trokuta i polovištima stranica koje sadrže taj vrh.

Ti trokuti su slični po SKS poučku o sličnosti (dvije stranice se po definiciji odnose kao 2:1, te dijele zajednički kut između stranica).

To povlači da se i treća stranica odnosi kao 2:1, odnosno pokazali smo da je srednjica jednaka polovici stranice iznad koje se nalazi. Iz sličnosti također slijedi da su kutovi ta dva trokuta jednaki, pa s obzirom na kutove uz presječnicu, slijedi da je srednjica i paralelna stranici iznad koje se nalazi.

5. Označimo sa α traženi kut između tangente i tetive $\overline{BC}$. Neka je S središte trokutu $\triangle ABC$ opisane kružnice. Tada je $\angle CBS = 90° - \alpha = \angle BCS$.

Zato je $\angle BSC = 180° - 2(90° - \alpha) = 2\alpha$ pa po teoremu o obodnom i središnjem kutu vrijedi $\angle BAC = \alpha$ što je i trebalo dokazati.

6. Školsko natjecanje 2019. SŠ A-1.3.

7. Sanja Varošanec, Teorem o obodnom i središnjem kutu, Primjer 5.

8. BSO (bez smanjenja općenitosti), pravci AQ i BP sijeku se unutar kružnice, a AP i BQ izvan.

Po Talesovom teoremu $\angle APB = \angle AQB = 90°$.

Ako promotrimo $\triangle AMB$, $\overline{BP}$ i $\overline{AQ}$ su visine tog trokuta.

Tada je N ortocentar (sjecište visina) u $\triangle AMB$.

Zato treća visina leži na pravcu MN iz čega slijedi da je $MN \perp AB$.

9. Neka je S središte zadane kružnice.

Promotrimo $\triangle TAS$ i $\triangle TBS$.

Njima je $\overline{TS}$ zajednička stranica, $|SA| = |SB|$ (radius kružnice) te vrijedi $\angle TAS = \angle TBS = 90°$ (tangenta na kružnicu je okomita na polumjer).

Tada po poučku o sukladnosti trokuta SSK zaključujemo $\triangle TAS \cong \triangle TBS$ iz čega slijedi $|TA| = |TB|$.

10. Školsko natjecanje 2018. SŠ A-1.2.

11. Školsko natjecanje 2015. SŠ A-2.2.

12. Državno natjecanje 2017. OŠ 7.5.

13. Državno natjecanje 2016. OŠ 7.5.

14. Državno natjecanje 2015. OŠ 8.3.

15. Državno natjecanje 2010. OŠ 8.5.

16. Školsko/gradsko natjecanje 2014. Sš A-1.7.

17. Općinsko natjecanje 2010. SŠ-A 2.7.

18. *(Tetivni četverokut)*

Neka je k kružnica opisana trokutu $\triangle ABC$ sa središtem u S.

Promotrimo središnji kut $\angle ASC$ kojemu je pridružen obodni kut $\angle ABC$. Vrijedi $\angle ASC = 2\angle ABC$. Ako promotrimo kut $\angle CSA = 360° - \angle ASC$, vrijedi $\angle CSA = 360° - 2\angle ABC = 2(180° - \angle ABC) = 2\angle ADB$.

Sada se lako dokaže da je $\angle ADB$ obodni kut na istoj kružnici nad tetivom $\overline{AC}$, odnosno D je točka na kružnici k čime je dokaz završen.

Vrijedi i obrat ove tvrdnje, a to je ujedno i karakterizacija tetivnog četverokuta.