J4	J/S grupa

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2021./22.

Indukcija

Mislav Brnetić

26. veljače 2022.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

Uvod

Princip matematičke indukcije moćan je i elegantan alat za dokazivanje različitih tvrdnji (označimo ih sa T_n) koje ovise o n.

Kao ilustraciju principa matematičke indukcije možemo prvo promotriti niz uspravno postavljenih domina: srušimo li prvu dominu, ona će srušiti sljedeću, koja će opet srušiti sljedeću itd. te će na kraju sve domine biti srušene.

Formalno, neka tvrdnja T_n vrijedi za $n = 1$. Želimo dokazati da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n.

Pretpostavimo li da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj k te zatim, uz tu pretpostavku, dokažemo da tvrdnja vrijedi i za $k + 1$, dokazali smo da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve (s obzirom da tvrdnja vrijedi za $n = 1$, zaključujemo da tvrdnja vrijedi i za $1 + 1 = 2$, zatim za $2 + 1 = 3$ itd.)

Dokaz principom matematičke indukcije sastavljen je od 3 dijela:

1. **baza** (T_1): dokažemo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$
2. **pretpostavka** (T_k): pretpostavimo da vrijedi tvrdnja za neki $k \in \mathbb{N}$
3. **korak indukcije** (T_{k+1}): koristeći pretpostavku dokazujemo da tvrdnja vrijedi i za $k + 1$

Princip matematičke indukcije možemo primijeniti i na bilo kojem drugom konačnom ili prebrojivom skupu (npr. parni prirodni brojevi, cijeli brojevi, prirodni brojevi veći od 150...) na isti način, ali uz modifikaciju baze i koraka indukcije.

Ponekad nam je potrebno više informacija (pretpostavki) da bismo pokazali korak indukcije. Tada u drugom koraku indukcije pretpostavljamo da tvrdnja vrijedi za sve $n \leq k$ za neki proizvoljan k prirodan broj umjesto samo za k (takav slučaj indukcije nazivamo **jaka indukcija** iako se u biti ne razlikuje od "obične" indukcije).

Jednako tako, u bazi indukcije ćemo ponekad dokazivati i da tvrdnja vrijedi za više vrijednosti od n kako bismo mogli ispravno provesti korak indukcije.

Ilustrirajmo princip matematičke indukcije na jednom primjeru. Uočite gdje koristimo pretpostavku indukcije. Možete li dati još neke primjere tvrdnji koje vrijede za sve prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$?

Primjer 1. Dokažite da za sve prirodne brojeve n vrijedi $1 + 2 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Rješenje. Tvrdnju ćemo dokazati koristeći matematičku indukciju.

baza Provjeravamo tvrdnju za $n = 1$. Očito je $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ pa smo pokazali bazu indukcije.

pretp. Pretpostavimo sada da za neki prirodan broj $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $1 + 2 + ... + k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$.

korak Želimo koristeći pretpostavku za k pokazati da je $1+2+...+k+k+1=\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$ odnosno da tvrdnja vrijedi i za $k+1$. Iz pretpostavke direktno imamo:

$$\begin{aligned}1+2+...+k &= \frac{k\cdot(k+1)}{2} / +(k+1)\\ 1+2+...+k+k+1 &= \frac{k\cdot(k+1)}{2}+k+1\\ 1+2+...+k+k+1 &= \frac{k\cdot(k+1)+2(k+1)}{2}\\ 1+2+...+k+k+1 &= \frac{(k+2)\cdot(k+1)}{2}\end{aligned}$$

Time smo dokazali korak indukcije pa po principu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n. ◁

Oprez!

Pripazite da korak indukcije zaista vrijedi za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Zadaci za juniorsku grupu

Lakši zadaci

1. Korištenjem indukcije dokažite da je n-ti neparan prirodan broj jednak $2n-1$ za svaki prirodan broj n.

2. Korištenjem indukcije dokažite da je za svaki prirodan broj n broj $n(n+1)$ paran.

3. Korištenjem indukcije dokažite da je zbroj prvih n parnih brojeva jednak n^2+n za svaki $n \in \mathbb{N}$.

4. Dokažite da je zbroj kvadrata prvih n prirodnih brojeva jednak $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

5. Dokažite da je $n! > 2^n$ za $n \geq 4$.

Umjereni zadaci

6. Dokažite da je poštanskim markama vrijednosti 3 kn i 5 kn moguće platiti svaku cjelobrojnu poštarinu od 8 kn na više.

7. Dokažite da je za svaki nenegativan cijeli broj n broj $169\cdot 13^n+14\cdot 196^n$ djeljiv sa 183.

8. Matematičkom indukcijom dokažite da vrijedi

$$4 \mid n^4-n^2$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.

9. Dokažite da je broj dijagonala pravilnog n-terokuta jednak $\frac{n(n-3)}{2}$.

10. n automobila nalazi se na kružnoj cesti. Zajedno imaju točno onoliko goriva koliko je potrebno jednom automobilu da napravi cijeli krug. Dokažite da postoji automobil koji može napraviti cijeli krug, na način da preuzme gorivo iz svakog od ostalih automobila u trenutku kad prođe kraj njih.

Zadaci za seniorsku grupu

Lakši zadaci

1. Dokažite da je zbroj kvadrata prvih n prirodnih brojeva jednak $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Dokažite da je $n! > 2^n$ za $n \geq 4$.

3. Koliko je

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}?$$

Umjereni zadaci

4. Dokažite da je poštanskim markama vrijednosti 3 kn i 5 kn moguće platiti svaku cjelobrojnu poštarinu od 8 kn na više.

5. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$37 \mid 2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}$$

6. Matematičkom indukcijom dokažite da vrijedi

$$4 \mid n^4 - n^2$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.

7. Neka je n prirodan broj. Dokaži da je $2^n \times 2^n$ ploču s jednim uklonjenim poljem moguće popločati trominama u obliku slova L.

8. U nekoj državi svaki par gradova je povezan točno jednom direktnom jednosmjernom cestom. Dokažite da postoji grad u koji je moguće doći iz svih ostalih gradova direktno ili preko najviše jednog grada.

9. n automobila nalazi se na kružnoj cesti. Zajedno imaju točno onoliko goriva koliko je potrebno jednom automobilu da napravi cijeli krug. Dokažite da postoji automobil koji može napraviti cijeli krug, na način da preuzme gorivo iz svakog od ostalih automobila u trenutku kad prođe kraj njih.

Teži zadaci

10. *(Lema o rukovanju)* U nekoj skupini ljudi neki su se ljudi međusobno rukovali. Dokažite da je broj ljudi koji su se rukovali s neparnim brojem ljudi paran.

11. Može li se ploču dimenzija 3 x 99 popločati L-triominama (pločicama od 3 kvadratića u obliku slova L)?

12. Dokažite AG nejednakost te odredite kada vrijedi jednakost.

Podsjetnik (AG nejednakost):

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{2} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

za nenegativne realne brojeve $x_1, x_2, ..., x_n$.

Više zadataka možete pronaći na `www.skoljka.org`.

Hintovi

Hintovi za juniorsku grupu

1. Provedite indukciju po n.

2. Provedite indukciju po n.

3. Provedite indukciju po n.

4. Provedite indukciju po n, ideja rješenja je slična kao u primjeru iz uvoda.

5. Provedite indukciju po n s bazom $n = 4$.

6. Primijenite princip jake indukcije te primijetite kako svaki iznos možemo dobiti dodavanjem marke od 3 kune na marke vrijednosti za 3 kune manje od traženog iznosa.

7. Provedite indukciju po $n \in \mathbb{N}_0$. Kako se ponaša zadani izraz?

8. Ako tvrdnja vrijedi za $k \in \mathbb{N}$, možete li dokazati da vrijedi i za $k + 4$?

9. Kako se mijenja broj dijagonala mnogokuta dodavanjem vrha?

10. Provedite indukciju po broju automobila. Mora li postojati automobil koji može doći do prvog sljedećeg?

Hintovi za seniorsku grupu

1. Provedite indukciju po n, ideja rješenja je slična kao u primjeru iz uvoda.

2. Provedite indukciju po n s bazom $n = 4$.

3. Isprobajte male primjere kako biste naslutili rješenje, a zatim dokažite jednakost indukcijom.

4. Primijenite princip jake indukcije te primijetite kako svaki iznos možemo dobiti dodavanjem marke od 3 kune na marke vrijednosti za 3 kune manje od traženog iznosa.

5. Provedite indukciju po n te u koraku indukcije raspišite dobiveni izraz kako biste dokazali da je djeljiv s 37.

6. Ako tvrdnja vrijedi za $k \in \mathbb{N}$, možete li dokazati da vrijedi i za $k + 4$?

7. Provedite indukciju po n, a u svakom koraku iskoristite pretpostavku da postoji popločavanje za neki $k \in \mathbb{N}$ kako biste popločali i za $k + 1$.

8. Provedite indukciju po broju gradova. Podijelite gradove u skup onih koji su povezani s "glavnim" gradom direktno te onih koji su povezani preko nekog drugog grada. Kakav je odnos novododanog grada s tim gradovima?

9. Provedite indukciju po broju automobila. Mora li postojati automobil koji može doći do prvog sljedećeg?

10. Provedite indukciju po broju ljudi. Kako se ponaša parnost broja ljudi koji su se rukovali s neparnim brojem ljudi dodavanjem još jedne osobe?

11. Indukcijom dokažite kako se $3 \times n$ ploča može popločati za sve parne n, a ne može za sve neparne n.

12. Prvo indukcijom dokažite da AG nejednakost vrijedi za svaki $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$, a zatim, također indukcijom, i za sve ostale vrijednosti n.

Rješenja

Rješenja za juniorsku grupu

1. Dokazat ćemo tvrdnju indukcijom.

baza Provjeravamo tvrdnju za $n = 1$. 1. neparan broj jednak je $1 = 2 \cdot 1 - 1$, dakle tvrdnja vrijedi.

pretp. Pretpostavimo sada da za neki prirodan broj $k \in \mathbb{N}$ vrijedi da je k-ti neparan prirodan broj jednak $2k - 1$.

korak Tada je $k + 1$-i neparan broj jednak $2k - 1 + 2 = 2k + 1 = 2(k + 1) - 1$, odnosno tvrdnja vrijedi i za $k + 1$.

Time smo principom indukcije dokazali traženu tvrdnju.

2. Dokazat ćemo tvrdnju indukcijom.

baza Provjeravamo tvrdnju za $n = 1$. Broj $1 \cdot 2 = 2$ je paran, dakle tvrdnja vrijedi.

pretp. Pretpostavimo sada da za neki prirodan broj $k \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $k \cdot (k + 1)$ paran.

korak Tada je $(k + 1)(k + 2) = k(k + 1) + 2(k + 1)$ također paran s obzirom da je zbroj dva parna broja, odnosno tvrdnja vrijedi i za $k + 1$.

Time smo principom indukcije dokazali traženu tvrdnju.

3. MNM online predavanja, Matematička indukcija, Zadatak 1.

4. Slično kao i u uvodnom primjeru, dokazat ćemo tvrdnju indukcijom.

baza Provjeravamo tvrdnju za $n = 1$. Vrijedi $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$.

pretp. Pretpostavimo sada da za neki prirodan broj $k \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

korak Tada je $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k + 1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$, odnosno tvrdnja vrijedi i za $k + 1$.

Time smo principom indukcije dokazali traženu tvrdnju.

5. Kao i ranije, dokazivat ćemo tvrdnju indukcijom. Međutim, ovaj put baza će biti $n = 4$, s obzirom da tvrdnju dokazujemo za $n \geq 4$.

baza Provjeravamo tvrdnju za $n = 4$. Vrijedi $24 = 4! > 2^4 = 16$.

pretp. Pretpostavimo sada da za neki prirodan broj $k \in \mathbb{N}, k \geq 4$, vrijedi da je $n! > 2^n$.

korak Tada je $(n + 1)n! > (n + 1)2^n$, a kako je $n + 1 > 2$, vrijedi i $(n + 1)2^n > 2^(n + 1)$, odnosno tvrdnja vrijedi i za $k + 1$.

Time smo principom indukcije dokazali traženu tvrdnju.

6. U ovom zadatku primijenit ćemo princip *jake indukcije* s bazom $n = 8$, $n = 9$ i $n = 10$.

Provjerimo tvrdnju za bazu, tj. za $n = 8$, $n = 9$ i $n = 10$. Poštarinu od 8 kn možemo platiti jednom markom od 5 kuna i jednom markom od 3 kune, od 9 kn s tri marke od 3 kune, a poštarinu od 10 kn s dvije marke od 5 kuna.

Pretpostavimo sada da za neki prirodan broj $k \in \mathbb{N}, k \geq 10$, vrijedi da sve poštarine iznosa manjeg ili jednakog od k, a većeg ili jednakog od 8 kn, možemo platiti samo markama od 3 kn i 5 kn. Tada poštarinu od $k + 1$ kuna možemo platiti markama kao poštarinu od $k - 2$ kuna te još jednom markom od 3 kune.

Time je tvrdnja dokazana.

Napomena: Alternativno rješenje možete pronaći u MNM online predavanjima, Matematička indukcija, 9. zadatak.

7. Dokazat ćemo tvrdnju indukcijom, međutim ovaj put po skupu $\mathbb{N}_0$, s obzirom da je cilj dokazati da zadana tvrdnja vrijedi za sve nenegativne cijele brojeve.

baza Provjeravamo tvrdnju za $n = 0$. Broj $169 \cdot 13^0 + 14 \cdot 196^0 = 183$, što je djeljivo sa 183, dakle tvrdnja vrijedi.

pretp. Pretpostavimo sada da za neki prirodan broj $k \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $169 \cdot 13^k + 14 \cdot 196^k$ djeljivo sa 183.

korak Tada je $169 \cdot 13^{k+1} + 14 \cdot 196^{k+1} = 169 \cdot 13^k \cdot 13 + 14 \cdot 196^k \cdot 196 = 13 \cdot (169 \cdot 13^k + 14 \cdot 196^k) + 183 \cdot 14 \cdot 196^k$, a s obzirom na pretpostavku indukcije, taj broj je također djeljiv sa 183, odnosno tvrdnja vrijedi i za $k + 1$.

Time smo principom indukcije dokazali traženu tvrdnju.

8. Pripreme 2016., 2. zadatak

9. MNM online predavanja, Matematička indukcija, Zadatak 6.

10. Dokazujemo tvrnju indukcijom.

Neka je T_n tvrdnja zadatka za n automobila.

Baza $n = 1$ vrijedi trivijalno.

Sada pretpostavimo da vrijedi T_n za neki $n \in \mathbb{N}$.

Neka imamo $n + 1$ automobila na cesti.
Dokažimo da postoji automobil koji sa svojim gorivom može stići do prvog sljedećeg.

Pretpostavimo suprotno, niti jedan automobil ne može stići do prvog sljedećeg.
No tada je zbroj količine goriva manji od goriva potrebnog za cijeli krug, iz čega slijedi kontradikcija.
Dakle, postoji automobil koji može stići do sljedećeg.

No, ta situacija je ekvivalentna situaciji da taj automobil već na početku ima svoje gorivo i gorivo sljedećeg automobila, a da sljedećeg automobila uopće nema, a to je upravo tvrdnja T_n koja vrijedi.

Dakle, dokazali smo $T_n \implies T_{n+1}$ pa po principu matematičke indukcije sada vrijedi $T_n, \forall n \in \mathbb{N}$ čime je dokaz završen.

Rješenja za seniorsku grupu

1. Slično kao i u uvodnom primjeru, dokazat ćemo tvrdnju indukcijom.

baza Provjeravamo tvrdnju za $n = 1$. Vrijedi $1^2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$.

pretp. Pretpostavimo sada da za neki prirodan broj $k \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

korak Tada je $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$, odnosno tvrdnja vrijedi i za $k + 1$.

Time smo principom indukcije dokazali traženu tvrdnju.

2. Kao i ranije, dokazivat ćemo tvrdnju indukcijom. Međutim, ovaj put baza će biti $n = 4$, s obzirom da tvrdnju dokazujemo za $n \geq 4$.

baza Provjeravamo tvrdnju za $n = 4$. Vrijedi $24 = 4! > 2^4 = 16$.

pretp. Pretpostavimo sada da za neki prirodan broj $k \in \mathbb{N}, k \geq 4$, vrijedi da je $n! > 2^n$.

korak Tada je $(n+1)n! > (n+1)2^n$, a kako je $n + 1 > 2$, vrijedi i $(n+1)2^n > 2^(n+1)$, odnosno tvrdnja vrijedi i za $k + 1$.

Time smo principom indukcije dokazali traženu tvrdnju.

3. Ako raspišemo traženi zbroj $S(n)$ za prvih nekoliko $n \in \mathbb{N}$ naslućujemo da bi trebalo vrijediti $S(n) = \frac{n}{n+1}$. Bazu smo već provjerili raspisujući male primjere.

Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $S(n) = \frac{n}{n+1}$. Sada imamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= S(n) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}\end{aligned}$$

pa smo pokazali korak indukcije. Dakle, indukcijom smo pokazali da je traženi zbroj jednak $\frac{n}{n+1}$ za svaki prirodni broj n.

4. Vidi rješenje zadatka 6. za juniorsku grupu.

5. MNM online predavanja, Matematička indukcija, Zadatak 4. (f)

6. Pripreme 2016., 2. zadatak

7. Zadatak ćemo riješiti indukcijom po n.

Dokaz za bazu $n = 1$ je očit.

Ploču veličine $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ podijelit ćemo na 4 jednake ploče veličine $2^n \times 2^n$. U središnji 2×2 kvadrat koji obuhvaća po jedno polje iz svakog od četiri dijela postavit ćemo jednu trominu pločicu koja će biti orijentirana tako da obuhvati ona tri od četiri dijela u kojima se ne nalazi prazno polje. Zatim ćemo svako od četiri dijela popločati trominama što možemo po pretpostavci indukcije.

Zato po principu indukcije svaku ploču dimenzije $2^n \times 2^n$ s uklonjenim jednim kutnim poljem možemo popločati trominama u obliku slova L.

8. Dokazujemo tvrdnju indukcijom. (T_n je tvrdnja zadatka za n gradova.)

Za $n = 1$ tvrdnja trivijalno vrijedi, možemo uzeti bazu $n = 2$, gdje tvrdnja ponovno trivijalno vrijedi.

Sada pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.

Neka je A grad u koji je moguće doći iz svih ostalih gradova direktno ili preko najviše jednog grada.
Označimo s $B_1, ..., B_k$ gradove iz kojih se u grad A može doći direktno, a s $C_1, \ldots, C_l$ gradove iz kojih se može doći samo preko nekog drugog grada.

Dakle, svi gradovi su zapravo $A, B_1, ..., B_k, C_1, ..., C_l$.

Primijetimo da se iz svakog od C-gradova u grad A zapravo dolazi preko nekog od B-gradova.

Dodajmo novi grad D, imamo dvije mogućnosti:

1. slučaj

Postoji cesta iz D u A ili u neki od B-gradova.

Sada tvrdnja zadatka i dalje vrijedi, naime D je povezan s A ili direktno ili preko nekog B-grada.

2. slučaj

Ne postoji cesta iz D niti u A te niti u jedan od B-gradova.

Sada dokažimo da je D grad za koji vrijedi tvrdnja zadatka.

Kako između svaka dva grada postoji jedna jednosmjerna cesta, možemo zaključiti da iz grada A te iz svakog B-grada postoji cesta u D. Također, kako se iz svakog od C-gradova u grad A zapravo dolazi preko nekog od B-gradova i prethodne tvrdnje, sada imamo da se iz svakog C-grada može doći u D preko nekog B-grada.

Dakle, tvrdnja zadatka vrijedi za sve gradove.

Kako smo riješili oba slučaja, zaključujemo $T_n \implies T_{n+1}$ pa vrijedi $T_n, \forall n \in \mathbb{N}$, čime je dokaz završen.

9. Vidi rješenje zadatka 10. za juniorsku grupu.

10. MNM online predavanja - Napredna indukcija - Zadatak 12.

11. MNM online predavanja - Napredna indukcija - Zadatak 2.

12. Dokažimo tvrdnju AG nejednakosti za $n = 2$.

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2}$$

$$\iff (x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1 \cdot x_2$$

$$\iff x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \cdot x_2 \geq 4x_1 \cdot x_2$$

$$\iff x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \cdot x_2 \geq 0$$

$$\iff (x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

što vrijedi.

Pokušajte dokazati za $n = 4$ koristeći ovu tvrdnju.

Dokažimo dalje indukcijom. Prvo ćemo dokazati da AG nejednakost vrijedi za sve brojeve oblika $2^k, k \in \mathbb{Z}$, a zatim za sve ostale.

Baza je $n = 2$ (odnosno za $k = 1$) što smo ranije dokazali.

Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$$

Želimo dokazati da tvrdnja vrijedi i za $2n$.

$$\frac{x_1 + \cdots + x_{2n}}{2n} \geq \sqrt[2n]{x_1 \ldots x_{2n}}$$

$$\iff \frac{x_1 + \cdots + x_{2n}}{n} \geq 2\sqrt[2n]{x_1 \ldots x_{2n}}$$

$$\iff \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{n} \geq 2\sqrt[2n]{x_1 \ldots x_{2n}}$$

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} \ldots x_{2n}}$$

Dovoljno je dokazati:

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} \ldots x_{2n}} \geq 2\sqrt[2n]{x_1 \ldots x_{2n}}$$

$$\iff \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} - 2\sqrt[2n]{x_1 \ldots x_{2n}} + \sqrt[n]{x_{n+1} \ldots x_{2n}} \geq 0$$

$$\iff (\sqrt[2n]{x_1 \ldots x_n} - \sqrt[2n]{x_{n+1} \ldots x_{2n}})^2 \geq 0$$

što vrijedi.

S obzirom da, ako tvrdnja vrijedi za n, vrijedi i za $2n$, odnosno 2^{k+1}, zaključujemo da vrijedi za svaki n oblika $2^k, k \in \mathbb{N}$.

Sada preostaje dokazati da vrijedi i za ostale vrijednosti n.

Ovu tvrdnju ćemo također dokazati indukcijom, ali s drugačijom bazom i korakom.

Sada nam je baza svaki n oblika $2^k, k \in \mathbb{Z}$.

Za svaku bazu smo već dokazali da vrijedi tvrdnja.

Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ vrijedi:

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$$

Sada želimo dokazati da tvrdnja vrijedi i za $n-1$.

Uvrstimo $x_n = \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}$.

$$\frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_{n-1} \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}}$$

$$\iff (\frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1})^n \geq x_1 \ldots x_{n-1} \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}$$

$$\iff (\frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1})^{n-1} \geq x_1 \ldots x_{n-1}$$

$$\iff \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{x_1 \ldots x_{n-1}}$$

Dakle, ako tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, vrijedi i za $n-1$.

Dokaz za slučaj jednakosti je sličan gornjem dokazu, jednakost se postiže kada su svi brojevei x_i međusobno jednaki.