S3 Seniorska grupa
Predavanja subotom
Osijek, sezona 2021./22.

Bojanja i popločavanja

Mateo Dujić

4. prosinca 2021.

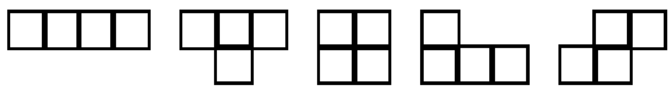
Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

Uvod

Zadatci ovog predavanja bave se particioniranjem skupa u konačan broj podskupova. Particioniranje se provodi **bojanjem** svakog elementa podskupa istom bojom.

Zadatci

1. Pravokutni pod pokriven je pločicama oblika 2×2 i 1×4. Jedna se razbila. (Ne)srećom, postoji pločica koja bi ju zamijenila, no drugog oblika. Dokaži da se pod ne može pokriti preraspodjelom pločica.



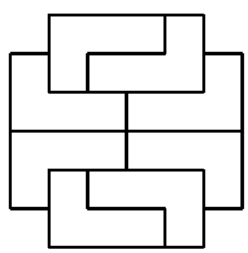
Slika 1: Tetromini

2. Je li moguće formirati pravokutnik s tetrominima?

3. Dokaži da 10×10 šahovska ploča ne može biti prekrivena s 25 T-tetromina.

4. Dokaži da 8×8 šahovska ploča ne može biti prekrivena s 15 T-tetromina i jednim kvadratnim tetrominom.

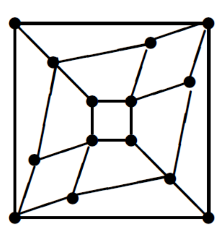
5. Dokaži da se 10×10 šahovska ploča ne može pokriti s 25 ravnih tetromina.



Slika 2: Skica za 6. zadatak

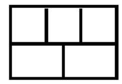
6. Neka je dana $n \times n$ šahovska ploča, ali da su joj sva četiri vrha uklonjena. Za koje vrijednosti od n možemo pokriti ploču s L-tetrominama?

7. Postoji li način pakiranja 250 $1 \times 1 \times 4$ kvadra u $10 \times 10 \times 10$ kocku?



Slika 3: Cestovna mreža

8. Graf prikazuje cestovnu mrežu koja spaja 14 gradova. Postoji li put koji prolazi kroz svaki grad točno jednom?



Slika 4: Skica za 9. zadatak

9. Pokaži da ne postoji krivulja koja siječe svaki segment na slici točno jednom.

10. Na jednom kvadratu 5×5 šahovske ploče, napišemo -1, a na ostala 24 kvadrata $+1$. U jednome potezu, možeš obrnuti predznak jednog $a \times a$ podkvadrata, pri čemu je $a > 1$. Cilj je napisati $+1$ na čitavom kvadratu. Na kojim kvadratima bi trebao -1 biti napisan da se postigne željeni cilj?

11. Sve točke u ravnini obojane su crvenom ili plavom bojom. Dokaži da za barem jednu boju uvijek postoje 2 točke zadane udaljenosti.

12. Sve točke ravnine obojane su s tri boje. Dokaži da postoje dvije točke udaljenosti 1 iste boje.

13. Dokaži da n točaka ($n \geq 5$) ravnine mogu biti obojane s dvije boje tako da nijedna linija ne može razdvojiti točke jedne boje od onih druge boje.

14. Uzmi u obzir tri vrha $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 0)$ u rešetci ravnine. Možeš li dospjeti u četvrti vrh $D = (1, 1)$ kvadrata zrcaljenjima krenuvši iz A, B, C ili preko točaka u koje se prethodno zrcalilo?

15. Svaka točka ravnine obojana je s točno jednom od boja crvenom, zelenom ili bijelom. Skupovi R, G, B sastoje se od duljina onih dužina u prostoru čije su obje krajnje točke crvena, zelena i plava, redom. Pokaži da su u barem jednom od ovih skupova svih nenegativni realni brojevi.

16. 7×7 kvadrat pokriven je sa šesnaest 3×1 i jedne 1×1 pločice. Koje su dozvoljene pozicije za 1×1 pločicu.

17. Svaki element 25×25 matrice je $+1$ ili -1. Neka je a_i produkt svih elemenata i-tog retka i b_j produkt svih elemenata j-tog stupca. Dokaži da vrijedi $a_1 + b_1 + \cdots + a_{25} + b_{25} \neq 0$.

Više zadataka možete pronaći na www.skoljka.org.

Hintovi

1. Podijeli ploču u kvadrate 2×2.

2. Obojaj ploču kako je obojana šahovska ploča i pokušaj popločati svaki od oblika.

3. Obojaj ploču kako je šahovska ploča i pokušaj popločati svaku vrstu T-tetromina.

4. Dosta slično kao prethodni zadatak.

5. Obojaj ploču dijagonalno u 4 boje.

6. Pokušaj popločati za neke n, npr $n = 10$.

7. Ovo je samo poopćenje 5. zadatka.

8. Obojaj gradove tako da nikoja dva susjeda nisu iste boje.

9. Pretpostavi da postoji linija koja siječe svaki segment točno jednom. Mora li svaka linija koja ulazi u pravokutnik, ujedno i izlaziti iz njega?

10. Obojaj ploču tako da jedino srednji stupac bude u bijeloj, a ostali u crnoj boji. Koliko je brojeva -1 u svakom koraku, ako krenemo tako da je -1 na početku na crnoj boji?

11. Pretpostavi da crvene točke nemaju udaljenost a, a plave b. Pokušaj konstruirati neki geometrijski lik koji vodi na kontradikciju.

12. Pokušaj konstruirati neki geometrijski lik s odgovarajućim duljinama stranica koji vodi na kontradikciju.

13. Kako bi bio obojen pravokutnik da ispunjava kriterije zadatka?

14. Refleksijama se uvijek ostaje na istoj boji.

15. Pretpostavi da su P_1, P_2 i P_3 odgovarajući skupovi točaka po bojama. Pretpostavimo suprotno, da ne postoje 2 točke udaljenosti a_1 u P_1, a_2 u P_2, a_3 u P_3. Pokušaj konstruirati geometrijski lik koji vodi na kontradikciju.

16. Pokušaj dijagonalno obojati ploču u tri boje. Što se događa ako ploču zarotiramo za $90°$?

17. Jasno je $a_1 a_2 \dots a_2 5 = b_1 b_2 \dots b_2 5 =$ produkt svih elemenata u matrici. Pretpostavi suprotno, $\sum_i (a_i + b_i) = 0$.

Rješenja

Svi zadatci ovoga predavanja dio su knjige Problem Solving Strategies koju je napisao Arthur Engel. Zadatci su iz poglavlja Coloring proofs. Knjiga se može pronaći na sljedećem linku. Zadatci se mogu pronaći na stranicama $26-28$, a rješenja na $28-37$. U nastavku je popis u obliku $x./y.$ pri čemu je $x.$ redni broj zadatka s predavanja, a $y.$ redni broj zadatka iz knjige.

1. /1.
2. /2.
3. /3.
4. /4.
5. /5.
6. /6.
7. /7.
8. /11.
9. /15.
10. /16.
11. /17.
12. /18.
13. /20.
14. /23.
15. /24.
16. /26.
17. /29.