J3	Juniorska grupa

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2021./22.

Invarijante

Patrik Papac
4.12.2021.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

Uvod

Invarijante su veličine koje se tijekom nekog procesa ne mijenjaju. Najčešće ih susrećemo u zadatcima gdje se sustav mijenja po određenim pravilima, a naš zadatak je utvrditi može li na taj način sustav doći u neko konačno određeno stanje. Pogledajmo primjer koji to lijepo dočarava.

Primjer 1. Na ploči su napisani cijeli brojevi od 1 do $4n-1$. Ivan u jednom koraku odabire dva broja koja obriše, i umjesto njih napiše njihovu razliku. Dokažite da nakon $4n-2$ koraka, na ploči ostane samo jedan paran cijeli broj.

Rješenje. U jednom koraku se broj brojeva na ploči smanjuje za jedan, tako da će nakon $4n-2$ koraka na ploči biti samo jedan broj. Na početku je $2n$ neparnih brojeva. Ako u jednom koraku izaberemo dva neparna broja, onda se broj neparnih brojeva smanjuje za 2. Ako odaberemo jedan parni i jedan neparni broj, onda broj neparnih brojeva ostaje isti. Zaključujemo da se parnost broja neparnih brojeva ne mijenja, a kako je on na početku paran, to znači da je i na kraju. Kako je na kraju samo jedan broj na ploči, on mora biti paran. $\triangleleft$

U ovom slučaju je invarijanta bila parnost broja neparnih brojeva na ploči. Bilo koja veličina može također biti invarijanta. Problemi popločavanja se često mogu riješiti promatrajući neke invarijantne veličine prilikom popločavanja.

Primjer 2. Dva suprotna kuta na šahovskoj ploči su izrezana. Je li moguće takvu ploču popločati s domino pločicama?

Rješenje. Pogledajmo veličinu $S =$(broj crnih nepopunjenih polja)$-$(broj bijelih nepopunjenih polja). U svakom koraku stavljanja jedne domino pločice ova veličina se ne mijenja. Kako je na početku S različit od 0, a na kraju treba biti 0, zaključujemo da je popločavanje nemoguće. $\triangleleft$

Zadaci

1. Na ploči se nalaze brojevi 5, 7, 12, 25, 6. Boris u svakom potezu bira par brojeva (x, y), briše ih s ploče i umjesto njih napiše par $(2y-x, 2x-y)$. Može li tako nizom poteza postići da na ploči piše pet desetki?

2. Zadan je skup brojeva $\{3, 4, 12\}$. U svakom koraku dozvoljeno je odabrati dva broja iz skupa, nazovimo ih a i b, te ih zamijeniti sa $0.6a-0.8b$ i $0.8a+0.6b$. Može li se nakon konačnog broja koraka doći do skupa $\{4, 6, 12\}$?

3. Zadana je šahovska ploča. U jednom potezu dozvoljeno je odabrati bilo koji redak ili stupac, te obrnuti boje svih polja u istome. Može li nakon nekog broja poteza ostati samo jedno crno polje?

4. Na otoku se nalazi 12 crvenih, 14 plavih i 16 zelenih kameleona. Kada se sretnu dva kameleona različitih boja, oba promijene boju u onu treću. Može li se dogoditi da svi kameleoni postanu iste boje?

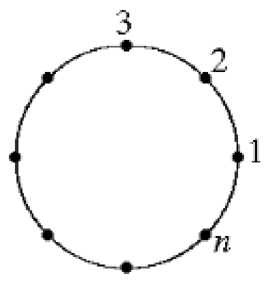
5. Na ploči piše nekoliko slova M i nekoliko slova N . Iva može obrisati dva slova i zamijeniti ih jednim na sljedeći način: ako je obrisala dva ista slova, zamijenit će ih slovom M, a ako je obrisala dva različita, zamijenit će ih slovom N. Dokažite da je zadnje slovo na ploči određeno početnim brojem slova, a ne Ivinim izborom redoslijeda.

6. Vedrana ima 10×10 ploču takvu da su gornji lijevi i donji desni 5×5 kvadrat popunjeni žetonima tako da je na svakom polju točno jedan žeton. Vedrana može s jednim žetonom "preskočiti" susjedni drugi žeton (ali ne može preskočiti više od jednog žetona odjednom). Može li Vedrana preseliti sve žetone u gornji desni i donji lijevi 5×5 kvadrat?

7. Na ploči su zapisani neki cijeli brojevi. U svakom koraku odabiremo brojeve a i b koji se nalaze na ploči, obrišemo ih, i umjesto njih zapišemo brojeve $3a - b$ i $13a - 3b$. Ako su na početku na ploči brojevi $1, 2, 3, 4, ..., 2011, 2012$, mogu li se nakon konačnog broja koraka na ploči nalaziti brojevi $2, 4, 6, 8, ..., 4022, 4024$?

8. Na kružnici je napisano 6 brojeva, $1, 0, 1, 0, 0, 0$ tim redom u smjeru kazaljke na satu. U jednom potezu je dozvoljeno pribrojati 1 na neka dva susjedna broja. Je li moguće doći do toga da su svi brojevi na kružnici jednaki?

9. Na svakoj točki kružnice na slici se nalazi jedan žeton. U jednom potezu je dozvoljeno bilo koja dva žetona pomaknuti za jedno mjesto u međusobno suprotnom smjeru. Je li moguće sve žetone prebaciti u jednu točku?



10. Na stolu je poredano $a + b$ posuda, gdje su a i b prirodni brojevi. Prvih a posuda sadrži po jednu jabuku, dok preostalih b posuda sadrži po jednu krušku.
Potez se sastoji od premještanja jabuke iz i-te u $(i+1)$-tu posudu i kruške iz j-te u $(j-1)$-tu posudu, ali je dopušten samo ako je razlika $i - j$ parna. Više voća se može nalaziti u posudi u isto vrijeme. Cilj je postići raspored u kojem je prvih b posuda popunjeno s kruškama, a preostalih a posuda sadrži po jabuku. Pokaži da je ovo moguće ako i samo ako je ab paran broj.

Više zadataka možete pronaći na www.skoljka.org.

Hintovi

1. Promatrajte zbroj.

2. Ovaj put zbroj ne pomaže, ali neka slična veličina igra istu ulogu.

3. Promatrajte parnost.

4. Promatrajte djeljivost s 3.

5. Korak u zadatku podsjeća na množenje 1 i -1.

6. Obojite ploču crno-bijelo. Što se događa pri jednom koraku?

7. Za koliko se promijeni zbroj brojeva u jednom koraku?

8. Neka vas korak inspirira da pronađete određenu invarijantu. Ako se dva susjedna mjesta mijenjaju za isti iznos u koraku, koja se veličina ne mijenja uopće?

9. Promatrajte veličinu $S = \sum_{i=1}^{n} ia_i$.

10. Prvo dokažite lakši smjer, tj. da je moguće u slučaju kad je ab paran broj. Rješenje bi vas trebalo navesti da promatrate kruške i jabuke na samo parnim ili samo neparnim mjestima.

Rješenja

1. Primjetimo da je $(2x-y)+(2y-x)=x+y$, što znači da je ukupni zbroj brojeva na ploči ostao jednak nakon poteza. Kako je na početku ukupan zbroj 55, a na kraju 50, zaključujemo da je nemoguće postići željeni cilj.

2. Pogledajmo što se događa sa zbrojem kvadrata u svakom koraku.

$$(0.6a-0.8b)^2+(0.8a+0.6b)^2=a^2+b^2,$$

odakle zaključujemo da je zbroj kvadrata konstantan. Kako je on drugačiji za početne i konačne brojeve, slijedi tvrdnja.

3. U jednom potezu se lagano vidi da parnost broja crnih polja na ploči ostaje ista. Na početku je to paran broj, a na kraju neparan, pa slijedi da je to nemoguće.

4. Pogledajmo ukupne promjene svake vrste kameleona u svakom susretu. Dvije vrste se smanje za po 1, a treća poveća za 2. Htjeli bismo da su svima promjene iste, tako da tražimo nešto takvo da oduzimanje 1 i dodavanje 2 budu ista stvar. To su primjerice ostatci pri dijeljenju s 3. Dakle, u svakom se susretu ostatak pri dijeljenju broja pripadnika svake vrste s 3 promijeni, i to tako da se poveća točno za dva. Primijetimo i da su na početku ostatci pri djeljenju s 3 broja pripadnika svake vrste međusobno različiti, pa će takvi i ostati. Dakle, ne može se dogoditi da dvije vrste dođu do 0 pripadnika, jer bi tada davale isti ostatak.

5. Primjetimo da ako uzmemo da su nam M slova jedinice, a N negativne jedinice, onda imamo da jedan Ivin potez zapravo skraćuje zapis množenja svih brojeva na ploči. To naravno znači da je zadnji broj koji ostaje neovisan o potezima i ovisan jedino o parnosti broja slova N.

6. Obojimo polja crno-bijelo kao na klasičnoj šahovskoj ploči, s tim da je u gornjem lijevom kutu crno polje. Primjetimo da je u svakom potezu broj žetona na crnim poljima očuvan. Kako je na početku taj broj 26, a na kraju 24, slijedi da je nemoguće postići željenu konfiguraciju.

7. U jednom koraku se ukupan zbroj brojeva promijeni za $5(3a-b)$, što znači da je pri svakom potezu očuvan ostatak zbroja pri dijeljenju s 5. Kako su ti ostatci različiti za početno i konačno stanje, zaključujemo da navedene brojeve nije moguće dobiti.

8. Označimo mjesta na kružnici redom brojevima od 1 do 6. Promotrimo veličinu $S=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6$, gdje a_i predstavlja broj na i-tom mjestu na kružnici. Ova veličina je invarijantna na zadani potez, a kako je na početku $S=2$, a na kraju $S=0$, zaključujemo da nije moguće postići da su svi brojevi jednaki.

9. Promotrimo veličinu $S=\sum_{i=1}^{n} ia_i$, gdje su oznake kao i u prošlom zadatku. Na početku imamo $S=\frac{n(n+1)}{2}$, a na kraju mora biti $S=kn$, za neki prirodni $k\leq n$. Pri jednom potezu se S mijenja za $0, n,$ ili $-n$, pa zaključujemo da se ostatak pri dijeljenju S s n ne mijenja. Kako je na kraju ostatak 0, to znači da $n+1$ mora biti paran. Lako se vidi da je u tom slučaju stvarno i moguće sve žetone prebaciti u jednu točku.

10. Prvo dokažimo da je konačna konfiguracija stvarno moguća ako je ab paran. Primjetimo da ako je udaljenost između dvije posude parna, onda dva voća iz točno te dvije posude možemo neprekidnim potezima zamijeniti. Pogledajmo slučaj u kojem je jedan od brojeva paran a drugi neparan. Zamijenimo jabuku iz posude 1 s kruškom iz posude $a+b$, jabuku iz posude 2 s kruškom iz posude $a+b-1$ itd. sve dok ne dobijemo željenu konfiguraciju. Pogledajmo sad slučaj u kojem su oba broja parna i $a\geq b$. Zamijenimo onda jabuku iz 1 s kruškom iz $a+1$, jabuku iz 2 s kruškom iz $a+2$ itd. Ako je $a\leq b$ onda zamijenimo krušku iz $a+b$ s jabukom iz a, krušku iz $a+b-1$ s jabukom iz $a-1$ itd. Ovo pokriva sve moguće slučajeve pa je konačna konfiguracija stvarno moguća.
Pretpostavimo sada da je ab neparan. Tada su i a i b neparni. Neka je j ukupan broj jabuka u neparnim posudama, te k ukupan broj kruški u neparnim posudama. Primjetimo da je veličina $S=j-k$ invarijantna tijekom procesa, jer se i j i k mijenjaju za isti iznos u jednom potezu. Na početku je ovaj broj jednak

$$S=\frac{a+1}{2}-\frac{b-1}{2},$$

dok je na kraju jednak

$$S=\frac{a-1}{2}-\frac{b+1}{2},$$

pa zaključujemo da je konačna konfiguracija u ovom slučaju nemoguća.