G1	Juniorska grupa

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2021./22.

Karakteristične točke trokuta

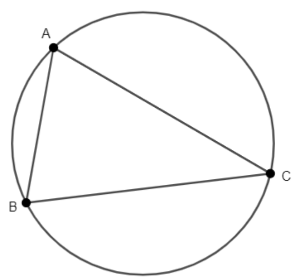
Katja Varjačić

13.11.2021.

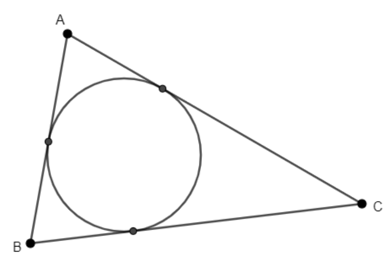
Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

Uvod

- simetrala dužine - pravac koji prolazi polovištem te dužine i okomit je na nju
- simetrala kuta - pravac koji taj kut dijeli na dva jednaka dijela
- srednjica trokuta - dužina koja spaja polovišta dviju stranica trokuta
- opisana kružnica trokuta - kružnica koja prolazi svim vrhovima trokuta
- upisana kružnica trokuta - kružnica koja (iznutra) dira sve tri stranice trokuta



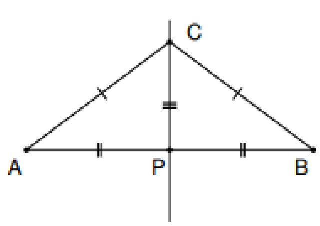
Slika 1: opisana kružnica



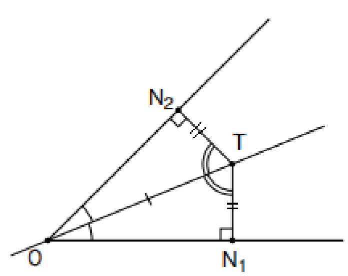
Slika 2: upisana kružnica

- visina trokuta - dužina koja spaja vrh s nasuprotnom stranicom trokuta i s njom zatvara pravi kut
- težišnica trokuta - dužina koja spaja vrh i polovište njemu nasuprotne stranice

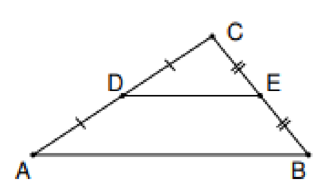
Teorem o simetrali dužine. Točka C leži na simetrali dužine $\overline{AB}$ ako i samo ako je $|AC| = |BC|$.
Teorem o simetrali kuta. Točka leži na simetrali kuta ako i samo ako je jednako udaljena od krakova tog kuta.
Teorem o srednjici trokuta. Srednjica trokuta je paralelna jednoj stranici trokuta i njena duljina je jednaka polovini duljine te stranice.



Slika 3: simetrala dužine



Slika 4: simetrala kuta



Slika 5: srednjica

U ovom predavanju promatrat ćemo sljedeće karakteristične točke trokuta:

- središte trokutu opisane kružnice O - sjecište simetrala dužina stranica trokuta

- središte trokutu upisane kružnice I - sjecište simetrala kuteva trokuta
- ortocentar trokuta H - sjecište pravaca na kojima leže visine trokuta
- težište trokuta T ili G - sjecište težišnica trokuta

U rješavanju geometrijskih zadataka vrlo često su od koristi i *tetivni četverokuti*, pa je zbog toga korisno znati barem najosnovnije stvari o njima. Tetivni četverokut je četverokut kojemu se može opisati kružnica, a zbroj nasuprotnih kuteva mu je $180°$. Osim toga, korisno je imati na umu i činjenicu da su obodni kutevi nad istom tetivom jednaki te da je središnji kut duplo veći od obodnog kuta nad istom tetivom.

Osnovne činjenice

1. Dokaži da sve simetrale stranica prolaze istom točkom i da je ta točka središte opisane kružnice trokuta.
2. Dokaži da sve simetrale kuteva prolaze istom točkom i da je ta točka središte upisane kružnice trokuta.
3. Dokaži da pravci na kojima leže visine trokuta prolaze istom točkom.
4. Dokaži da sve težišnice prolaze istom točkom.

Zadaci

5. Dokažite da u šiljastokutnom trokutu ABC s ortocentrom H vrijedi $\angle ACO = \angle BCH$.
6. Neka su N_A, N_B i N_C nožišta visina trokuta ABC. Dokaži da je ortocentar trokuta ABC središte upisane kružnice $\triangle N_A N_B N_C$.
7. Neka je H ortocentar trokuta ΔABC. Dokažite da osnosimetrične slike točke H s obzirom na stranice trokuta leže na opisanoj kružnici tog trokuta.
8. Neka je H nožište visine iz C šiljastokutnog trokuta ABC, a točka O središte njemu opisane kružnice. Ako je T nožište okomice iz točke C na pravac AO, dokažite da pravac TH prolazi polovištem dužine BC.
9. Neka je P presjek simetrale kuta $\angle BCA$ i simetrale stranice $\overline{AB}$, a I središte upisane kružnice $\triangle ABC$. Tada vrijedi $|AP| = |IP| = |BP|$.
10. Neka je I središte upisane kružnice te neka su E i F dirališta upisane kružnice sa stranicama AC i AB trokuta ABC redom. Neka je točka T presjek pravaca CI i EF. Dokažite da je $\angle BTC = 90°$.

Teži zadaci

11. Dokažite da ortocentar, težište i središte opisane kružnice trokuta leže na istom pravcu. Taj se pravac naziva **Eulerov pravac trokuta**.
12. Dokažite da polovišta stranica, nožišta visina i polovišta dužina koje spajaju vrhove trokuta s ortocentrom leže na istoj kružnici. Ta se kružnica naziva **Feuerbachova kružnica** ili **kružnica devet točaka**.
13. Neka je ABC šiljastokutan trokut u kojem je $|\angle BAC| = 75°$. Neka je P polovište stranice $\overline{BC}$, a M i N redom nožišta visina iz vrhova B i C. Odredi $|\angle MPN|$.
14. Upisana kružnica dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC u točkama M i N. Neka je P sjecište pravca MN i simetrale kuta $\angle ABC$. Dokaži da je $BP \perp CP$.

Više zadataka možete pronaći na `www.skoljka.org`.

Hintovi

1. Dokažite da sjecište dvije simetrale stranice leži i na trećoj.
2. Dokažite da sjecište dvije simetrale kuta leži i na trećoj.
3. Iskoristite zadatak 1.
4. Dokažite da se svake dvije težišnice sijeku u omjeru $2:1$.
5. Prisjeti se poučka o obodnom i središnjem kutu.
6. Pokušaj dokazati da su visine trokuta ABC simetrale kuteva trokuta $N_AN_BN_C$.
7. Neka je T tražena osnosimetrična slika ortocentra. Dovoljno je dokazati da je četverokut $ATBC$ tetivan (zbroj dva nasuprotna kuta je $180°$).
8. Sjeti se da je polovište hipotenuze središte opisane kružnice pravokutnog trokuta.
9. Dokaži da se simetrala kuta i simetrala stranice sijeku na opisanoj kružnici trokuta ABC.
10. Dovoljno je dokazati da je četverokut $BIET$ tetivan.
11. Pronaći slične trokute i iskoristiti činjenicu da težište dijeli svaku težišnicu u omjeru $2:1$.
12. Promotrite srednjicu.
13. Iskoristite Feuerbachovu kružnicu.
14. Tetivni četverokut i *angle chase*.

Rješenja

1. MNM online predavanje Karakteristične točke trokuta - video rješenje
2. MNM online predavanje Karakteristične točke trokuta - video rješenje
3. MNM online predavanje Karakteristične točke trokuta - video rješenje
4. MNM online predavanje Karakteristične točke trokuta - video rješenje
5. Rješenje
6. Neka je H ortocentar trokuta ABC. Iz tetivnosti četverokuta AN_CHN_B zaključujemo da je $\measuredangle HN_BN_C = \measuredangle CAN_C = 90 - \beta/2$. Analogno iz tetivnosti četverokuta CN_BHN_A dobivamo $\measuredangle HN_BN_A = 90 - \beta/2$. Budući da su ta dva kuta jednaka vidimo da je HN_B simetrala kuta $\angle N_AN_BN_C$. Analogno dobivamo da su i ostale visine simetrale kuteva u trokutu $N_AN_BN_C$ pa je H središte upisane kružnice tog trokuta.
7. MNM online predavanje Tetivni četverokuti - video rješenje
8. Rješenje.
9. Rješenje.
10. Iz činjenice da je trokut $\triangle AEF$ jednakokračan i da je CI simetrala kuta $\angle ACB$ pomoću zbroja kuteva u $\triangle CFT$ dobivamo da je $\measuredangle CTF = \beta/2$. Stoga je $\measuredangle ITE = \measuredangle IBE = \beta/2$, pa je četverokut $BIET$ tetivan, iz čega slijedi tvrdnja zadatka.
11. Ilišević, Dijana; Bombardelli, Mea. Elementarna geometrija (skripta), Teorem 4.9.
12. Ilišević, Dijana; Bombardelli, Mea. Elementarna geometrija (skripta), Teorem 5.8.
13. školsko 2017., A3, 5. zadatak
14. državno 2010., A2, 4. zadatak