S1	Seniorska grupa

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2021./22.

Funkcijske jednadžbe

Nika Utrobičić

23. listopada 2021.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

Uvod

Za početak, prisjetimo se što je funkcija:

Definicija 1
Funkcija $f : A \to B$ je preslikavanje koje svakom elementu skupa A pridružuje točno jedan element skupa B. Skup A zovemo *domena*, a skup B *kodomena* funkcije f.

Funkcijske jednadžbe su, jasno, one jednadžbe kojima je rješenje funkcija. Ne postoji šablona za njihovo rješavanje, već ih rješavamo primjenjujući razne trikove.

1 Uvrštavanja i supstitucije

Često će nam u rješavanju funkcijskih jednadžbi biti jako korisno uvrstiti konkretne vrijednosti. Uvijek pokušajte uvrstiti vrijednosti 0, 1 i -1.

Primjer 1. Pronađite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju jednadžbu

$$f(x + y) = x \cdot f(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Rješenje Uvrstimo li 0 kao x i x kao y, dobit ćemo

$$f(x) = 0$$

Kako to vrijedi za svaki x iz domene, zaključujemo da je jedino moguće rješenje $f(x) = 0$. Jednostavnim uvrštavanjem u početnu jednadžbu provjerimo da to zaista je rješenje.
Mnoge se funkcijske jednadžbe mogu riješiti pametnim supstitucijama - želimo dobiti što jednostavniji izraz, pa namještamo da nam se izrazi pokrate.

Primjer 2. Pronađite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju jednadžbu

$$f(x^2 + y) = f(x^{27} + 2y) + f(x^4)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Rješenje Želimo uvrstiti y takav da nam se pokrate $f(x^2 + y)$ i $f(x^{27} + 2y)$. Zato treba biti

$$x^2 + y = x^{27} + 2y$$

Pa uvrštavamo $y = x^2 - x^{27}$ i dobijamo

$$f(2x^2 - x^{27}) = f(2x^2 - x^{27}) + f(x^4)$$

to jest,

$$f(x^4) = 0$$

za sve $x \in \mathbb{R}$.
Možemo uzeti četvrti korijen bilo kojeg nenegativnog broja, to jest svaki $x \in \mathbb{R}^+$ možemo zapisati kao $x = \sqrt[4]{y}$ za neki $y \in \mathbb{R}^+$. Zato uvrštavanjem $x = \sqrt[4]{y}$ u izraz dobivamo

$$f\left((\sqrt[4]{y})^4\right) = 0$$

iz čega slijedi

$$f(x) = 0$$

za svaki nenegativni x.
Sada jednostavno možemo dobiti rješenje za sve brojeve tako što uvrstimo $\sqrt[27]{x}$ i 0 u originalnu jednadžbu. Dobijamo

$$f\left(\left(\sqrt[27]{x}\right)^2\right) = f(x) + f\left(\left(\sqrt[27]{x}\right)^4\right)$$

Kako su kvadrati i četvrte potencije svih realnih brojeva nenegativni, znamo da je za njih funkcija 0, pa imamo

$$f(x) = 0$$

za sve $x \in \mathbb{R}$. Jednostavnim uvrsštavanjem u početnu jednadžbu vidimo da je funkcija zaista rješenje.

Oprez!
Nužno je uvrstiti funkcije za koje smo dobili da mogu biti rješenja u početnu jednadžbu da provjerimo jesu li zaista rješenja!

Ponekad je korisno napraviti supstituciju tako da od funkcijske jednadžbe dobijemo sustav jednadžbi.

Primjer 3. Pronađite sve funkcije $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju jednadžbu

$$f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$$

a sve $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Rješenje Uvrstimo li $\frac{1}{x}$, dobijamo

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + 3f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Sada jednostavno riješimo sustav jednadžbi: od originalne jednadžbe oduzmemo ovu pomnoženu s 3.

$$\begin{aligned} f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) - 3\left(f\left(\frac{1}{x}\right) + 3f(x)\right) &= x^2 - \frac{3}{x^2} \\ -8f(x) &= x^2 - \frac{3}{x^2} \\ f(x) &= \frac{3}{8x^2} - \frac{x^2}{8} \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u početnu jednadžbu uvjerimo se da je to zaista rješenje.

2 Korisna svojstva funkcija

U zadacima je često korisno provjeriti ima li funkcija neko od ovdje definiranih svojstava.

Definicija 2
Funkcija $f : A \to B$ je *surjekcija* ako za svaki $y \in B$, postoji neki $x \in A$ takav da $f(x) = y$.

Primjer 4. Pronađite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da

$$f(xf(y) - f(x)) = 2f(x) + xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

te $f(0) = 0$

Rješenje Prvo ćemo dokazati da je funkcija surjekcija. Uvrstimo li 1 i x, dobijemo:

$$f(f(x) - f(1)) = 2f(1) + x$$

S desne strane ove jednakosti je linearna funkcija a za nju znamo da je surjekcija, to jest za svaki y iz $\mathbb{R}$ možemo pronaći x takav da $2f(1) + x = y$ (Naravno, taj x je upravo $y - 2f(1)$). Tada znamo da je

$$y = f(f(x) - 2f(1))$$

stoga je i funkcija f surjekcija.
Uvrstimo y i 0 u jednadžbu:

$$f(-f(y)) = 2f(y)$$

Kako je f surjekcija, lako provjerimo da je onda i $-f$ surjekcija. Zato možemo supstituirati $x = -f(y)$ i zaključiti da je jedino moguće rješenje

$$f(x) = -2x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vraćanjem u početnu jednadžbu vidimo da to nije rješenje, stoga ova funkcijska jednadžba nema rješenja.

Definicija 3

Funkcija $f : A \to B$ je *injekcija* ako vrijedi

$$f(x) = f(y) \iff x = y$$

Za funkciju koja je i injekcija i surjekcija kažemo da je *bijekcija*.

Primjer 5. Pronađite sve funkcije $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da

$$f(xf(y) - f(x)) = f(x) + xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Rješenje Prvo ćemo dokazati da je funkcija injekcija. Očito je da ako $x = y$, onda $f(x) = f(y)$. Trebamo dokazati da, ako $f(x) = f(y)$, onda $x = y$.
Uvrštavanjem 1 i x u početnu jednadžbu, dobivamo formulu 1 koja će nam koristiti u dokazu injektivnosti:

$$f(f(x) - f(1)) = f(1) + x$$

Pretpostavimo da $f(x) = f(y)$. Tada

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(y) && \text{Oduzmi } f(1) \text{ od obje strane} \\
f(x) - f(1) &= f(y) - f(1) && \text{Djeluj funkcijom } f \text{ na obje strane} \\
f(f(x) - f(1)) &= f(f(y) - f(1)) && \text{Prepoznaj formulu 1} \\
f(1) + x &= f(1) + y && \text{Oduzmi } f(1) \text{ od obje straneĄ} \\
x &= y
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je funkcija injekcija.
Uvrstimo li x i 0, dobijamo

$$f(xf(0) - f(x)) = f(x)$$

pa zbog injektivnosti možemo zaključiti da

$$xf(0) - f(x) = x$$

Zaključujemo da rješenje mora biti oblika

$$f(x) = (f(0) - 1) \cdot x$$

Uvrštavanjem nule u jednadžbu dobivamo $f(0) = 0$, stoga zaključujemo da je jedino moguće rješenje

$$f(x) = -x$$

Jednostavnim uvrštavanjem u početnu jednadžbu uvjerimo se da je to zaista rješenje.

Spomenut ćemo još neka svojstva koja je korisno uočiti kad rješavamo zadatke:

Definicija 4
Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *parna* ako vrijedi
$$f(x) = f(-x)$$
a *neparna* ako vrijedi
$$f(x) = -f(-x)$$
Funkcija je *involucija* ako vrijedi
$$f(f(x)) = x$$

3 Matematička indukcija (domena $\mathbb{N}$)

Kad imamo funkcijsku jednadžbu u prirodnim brojevima, matematička indukcija je često koristan alat.

Primjer 6. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za sve prirodne x i y vrijedi

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Rješenje Kad imamo funkcijsku jednadžbu na prirodnim brojevima, uvijek je korisno početi uvrštavanjem malih brojeva:
$$f(2) = f(1 + 1) = 2f(1)$$
$$f(3) = f(2 + 1) = f(2) + f(1) = 3f(1)$$
slutimo da vrijedi
$$f(n) = n \cdot f(1)$$
za svaki $n \in \mathbb{N}$ Dokazujemo tvrdnju matematičkom indukcijom:

- BAZA:
$$f(1) = f(1)$$
Tvrdnja vrijedi za $n = 1$.
- PRETPOSTAVKA:
$$f(n) = n$$
za neki $n \in \mathbb{N}$.
- KORAK:
$$\begin{aligned} f(n + 1) &= f(n) + f(1) \\ &= n \cdot f(1) + f(1) \quad \text{Po pretpostavci} \\ &= (n + 1) \cdot f(1) \end{aligned}$$

Po principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, jedino moguće rješenje funkcijske jednadžbe je $f(n) = nf(1)$, odnosno označimo li $c = f(1)$,

$$f(n) = cn$$

za bilo koji $c \in \mathbb{N}$. Jednostavnom supstitucijom u početnu jednadžbu provjerimo da to zaista je rješenje.

Uvodni zadaci

1. Pronađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

2. Nađite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je: $f(x+y) + f(x-y) = x^2 + y^2$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Nađite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je:

$$f(x+y) + 2f(x-y) + f(x) + 2f(y) = 4x + y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

4. Nađite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je:

$$2f(1-x) + 1 = xf(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

5. Dokaži da je svaka involucija bijekcija.

Zadaci

6. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x,\, y \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$f\big(x^2 + f(y)\big) = y - x^2.$$

7. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(x)f(y) = f(x+y) + xy.$$

8. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(xy)(x + f(y)) = x^2 f(y) + y^2 f(x).$$

9. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(x + f(y)) = f(f(y)) + 2xf(y) + x^2$$

10. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(xy+1) = f(x)f(y) - f(y) - x + 2.$$

11. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

$$f(x) = \max_{y \in \mathbb{R}} (2xy - f(y))$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

12. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koje zadovoljavaju sljedeća dva uvjeta.

- Za sve $a, b \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$f(a,b) + a + b = f(a,1) + f(1,b) + ab.$$
- Ako su $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da je neki od brojeva $a+b$ i $a+b-1$ djeljiv prostim brojem $p > 2$, onda je i $f(a,b)$ djeljiv s p.

13. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ za koje vrijede sljedeća dva uvjeta:
i) $f(n)\, f(-n) = f\big(n^2\big)$ za sve $n \in \mathbb{Z}$
ii) $f(m+n) = f(m) + f(n) + 2mn$ za sve $m,\, n \in \mathbb{Z}$.

14. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija takva da je

$$f(ab) = f(a+b)$$

za sve prirodne brojeve $a \geqslant 4$ i $b \geqslant 4$. Dokaži da je $f(n) = f(8)$ za sve prirodne brojeve $n \geqslant 8$.

Više zadataka možete pronaći na www.skoljka.org.

Hintovi

1. Uvrsti 0.

2. Uvrsti $\frac{x}{2}$.

3. Uvrsti 0.

4. Svedi na sustav jednadžbi.

5. Pogledaj primjere 4 i 5.

6. Dokaži i primijeni involuciju na početnu da dobiješ dodatnu jednadžbu.

7. Uvrštavaj 0, 1 i -1.

8. Uvrštavaj 0, 1 i -1.

9. Dobij (korisna uvrštavanja: $-f(y)$) da je oblik rješenja neka kvadratna funkcija pa uvrsti i direktno provjeri.

10. Pokušaj izraziti rješenje preko $f(1)$ i $f(0)$.

11. Razmišljaj o uvjetu kao o nejednakosti, pa promatraj vrijednost od y kad vrijedi jednakost.

12. Izrazi $f(1, b+1)$ preko $f(1, b)$.

13. Koristeći drugi uvjet (teleskopiranje), izrazi $f(k)$ koristeći $f(1)$.

14. Iskoristi uvjet da dobiješ $f(n) = f(n+1)$ za dovoljno veliki n.

Rješenja

1. Uvrštavanjem x i 0 dobijemo

$$f(0) = f(x) + f(0)$$

stoga je jedino moguće rješenje

$$f(x) = 0$$

Provjerom utvrdimo da je to zaista rješenje.

2. Uvrštavanjem 0 i 0 dobijemo

$$f(0) = 0$$

Zato uvrštavanjem $\frac{x}{2}$ i $\frac{x}{2}$ dobijemo

$$f(x) = \frac{x^2}{2}$$

stoga je jedino moguće rješenje

$$f(x) = \frac{x^2}{2}$$

Provjerom utvrdimo da je to zaista rješenje.

3. Uvrštavanjem 0 i 0 dobijemo

$$f(0) = 0$$

Zato uvrštavanjem x i 0 dobijemo

$$4f(x) = 4x$$

stoga je jedino moguće rješenje

$$f(x) = x$$

Provjerom utvrdimo da je to zaista rješenje.

4. Uvrstimo $1 - x$ i dobijemo

$$2f(x) + 1 = (1 - x)f(1 - x)$$

Kako iz početne jednadđbe možemo zaključiti da

$$f(1 - x) = \frac{xf(x) - 1}{2}$$

imamo

$$2f(x) + 1 = (1 - x) \cdot \frac{xf(x) - 1}{2}$$

Rješavanjem jednadžbe dobijamo

$$\left(2 - \frac{x(1 - x)}{2}\right) f(x) = -1 - \frac{1 - x}{2}$$

to jest

$$\frac{x^2 - x + 4}{2} \cdot f(x) = \frac{x - 3}{2}$$

Zaključujemo da je jedino moguće rješenje

$$f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - x + 4}$$

Vraćanjem u početnu jednadžbu vidimo da to zaista jest rješenje.

5. Kako se svaki y postiže i to za $x = f(y)$, funkcija je surjekcija. jasno je da

$$x = y \to f(x) = f(y)$$

.
Pretpostavimo li $f(x) = f(y)$, primjenimo li funkciju f na obe strane jednadžbe možemo zaključiti da $f(f(x)) = f(f(y))$, to jest po funkcijskoj jednadžbi $x = y$.
Zaključujemo da je funkcija i injekcija, stoga je surjekcija.

6. Državno 2011., 4. razred

7. Državno 2014., 4. razred

8. Državno 2015., 4. razred

9. Državno 2017., 4. razred

10. Državno 2016., 4. razred

11. Državno 2009., 4. razred

12. Državno 2019., 4. razred

13. Državno 2010., 4. razred

14. Državno 2018., 4. razred