J1	Juniorska grupa

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2021./22.

Uvod u nejednakosti

Mislav Brnetić

23. listopada 2021.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

Uvod

Zadaci iz nejednakosti se vrlo često pojavljuju na raznim razinama natjecanja pa je zato poznavanje nejednakosti, makar i samo osnovnih principa rješavanja, vrlo poželjno, s obzirom da težina zadataka može jako varirati.
Ovo predavanje je uvod u osnovne principe dokazivanja nejednakosti te u nejednakost među sredinama (kvadratne, aritmetičke, geometrijske i harmonijske sredine) kao osnovne nejednakosti, što je u principu dovoljno za rješavanje nejednakosti do državne razine.
Zainteresiranima kao prirodni nastavak ovog predavanja preporučam *CSB (Cauchy-Schwarz-Bunjakovski)* nejednakost. Za više ideja za rješavanje zadataka pogledajte [1].

Za početak, primijetimo da vrijede sljedeće tvrdnje:

1. $x \geq y$ i $x \leq y \implies x = y, \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. $x \geq y$ i $y \geq z \implies x \geq z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
3. $x \geq y$ i $a \geq b \implies x + a \geq y + b, \forall x, y, a, b \in \mathbb{R}$
4. $x \geq y \implies x + z \geq y + z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
5. $x \geq y$ i $a \geq b \implies xa \geq yb, \forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0$
6. $x \geq 0$ i $y \geq 0 \implies xy \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$
7. $x \in \mathbb{R} \implies x^2 \geq 0, x^2 = 0$ samo za $x = 0$

Primjer 1. Dokažite da za sve realne brojeve vrijedi:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Rješenje. Prebacivanjem izraza s desne strane dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$(a - b)^2 \geq 0$$

što je poznato da vrijedi. ◁

U dokazivanju nejednakosti tipičan pristup je krenuti s jednom stranom nejednakosti te pomoću niza nejednakosti doći do tražene druge strane ili zapisati nejednakost u drugom ekvivalentnom obliku koji možemo lako dokazati.

Oprez!

Ukoliko tražite niz ekvivalentnih nejednakosti, pripazite da nejednakosti zaista i jesu ekvivalentne. Naime, djelovanje nekih operacija nad nejednakostima nije jednako kao kod jednakosti (npr. množenje negativnim brojem).
Jednako tako, ako krećete s jedne strane željene nejednakosti, pripazite da možete dokazati preslabu nejednakost - npr. da je neki izraz veći od 3, iako treba dokazati da je veći i od 5.

KAGH nejednakosti (nejednakosti među kvadratnom, aritmetičkom, geometrijskom i harmonijskom sredinom) su jedne od temeljnih nejednakosti. Za početak, definirajmo kvadratnu, aritmetičku, geometrijsku i harmonijsku sredinu (za n brojeva označenih $x_1, x_2, ..., x_n$):

Definicija 1

- harmonijska sredina

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}$$

- geometrijska sredina

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$$

- aritmetička sredina

$$A = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

- kvadratna sredina

$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$$

Teorem 2

Za pozitivne realne brojeve $x_1, ..., x_n$ vrijedi nejednakost među sredinama:

$$K \geq A \geq G \geq H$$

Dodatno, jednakost vrijedi samo za $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Dokaz. Prvo dokazujemo AG nejednakost.
Dokažimo tvrdnju za $n = 2$.

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2}$$

$$\iff (x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1 \cdot x_2$$

$$\iff x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \cdot x_2 \geq 4x_1 \cdot x_2$$

$$\iff x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \cdot x_2 \geq 0$$

$$\iff (x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

što vrijedi.
Ovdje lako slijedi kako jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2$.
Dokaz za $n > 2$ ostavljam za vježbu čitatelju (hint: pokušajte primijeniti ovaj dokaz na $n = 4$) □

KA nejednakost vrijedi za sve realne brojeve.

Dokaz za KA i GH nejednakost slijedi kao zadatak 7.

Lakši zadaci

1. Dokažite da za sve realne brojeve a, b, c vrijedi:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

2. Dokažite da za nenegativne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost:

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

3. Neka je $a \geq 0$. Dokažite da za sve realne brojeve x, y, z za koje je $x + y + z = 0$ vrijedi nejednakost:

$$(1 + a^x)(1 + a^y)(1 + a^z) \geq 8$$

Kada vrijedi jednakost?

4. Dokažite da za svaki realan broj x vrijedi nejednakost

$$\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$$

Kada vrijedi jednakost?

5. Neka su $a_1, a_2, ..., a_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_n + 1) \geq 2^n$$

Kada vrijedi jednakost?

6. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve p, q vrijedi nejednakost:

$$(p^2 + p + 1)(q^2 + q + 1) \geq 9pq$$

Umjereni zadaci

7. Dokažite KA i GH nejednakost.

8. Neka je x pozitivan realan broj. Odredite minimalnu vrijednost izraza

$$x + \frac{1}{x}$$

9. (**Nesbittova nejednakost**) Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite nejednakost:

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}$$

10. Za pozitivne realne brojeve a, b, c dokažite da vrijedi:

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} \geq \frac{a + b}{2}$$

11. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve vrijedi

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$$

12. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b i prirodan broj n vrijedi nejednakost:

$$\sqrt[n+1]{ab^n} \leq \frac{a + nb}{n + 1}$$

13. Ako je $b > a > 0$, odredite minimalnu vrijednost izraza:

$$b + \frac{1}{a(b - a)}$$

14. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a + b + c = 1$. Dokažite nejednakost:

$$\frac{1 + 9a^2}{1 + 2a + 2b^2 + 2c^2} + \frac{1 + 9b^2}{1 + 2a^2 + 2b + 2c^2} + \frac{1 + 9c^2}{1 + 2a^2 + 2b^2 + 2c} < 4$$

Teži zadaci

15. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=3$. Dokažite nejednakost:

$$\frac{a^2+6}{2a^2+2^2+2c^2+2a-1}+\frac{b^2+6}{2a^2+2^2+2c^2+2b-1}+\frac{c^2+6}{2a^2+2^2+2c^2+2c-1}\leq 3$$

16. Dani su realni brojevi $x_0, x_1, ..., x_n$ takvi da vrijedi $x_0 > x_1 > ... > x_n$. Dokažite da vrijedi nejednakost:

$$x_0 - x_n + \frac{1}{x_0-x_1}+\frac{1}{x_1-x_2}+...+\frac{1}{x_{n-1}-x_n}\geq 2n$$

17. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a^2+b^2+c^2=3$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a^4+3ab^3}{a^3+2b^3}+\frac{b^4+3bc^3}{b^3+2c^3}+\frac{c^4+3ca^3}{c^3+2a^3}\leq 4$$

18. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=1$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a}{a+b^2}+\frac{b}{b+c^2}+\frac{c}{c+a^2}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\right)$$

19. Pri vrhovima komada kartona u obliku kvadrata duljine stranice a odsijecimo jednake kvadrate duljine stranice x i od ostatka složimo kutiju bez poklopca.
Odredi x tako da kutija bude maksimalnog volumena.

Više zadataka možete pronaći na www.skoljka.org.

Hintovi

1. Pomnožite zadanu nejednakost s 2 te dokažite pomoću tvrdnje da je kvadrat nenegativan.

2. Primijenite AG nejednakost na svaki faktor s lijeve strane.

3. Primijenite AG nejednakost na svaki faktor s lijeve strane i iskoristite uvjet iz zadatka.

4. Pomnožite nejednakost sa $\sqrt{x^2+1}$ i zatim iskoristite AG nejednakost.

5. Primijenite AG nejednakost na svaki faktor s lijeve strane.

6. Ponovno primijenite AG nejednakost na svaki faktor s lijeve strane.

7. *KA nejednakost*
Primijenite činjenicu da je kvadrat broja nenegativan.
GH nejednakost
Primijenite AG nejednakost.

8. Koristite AG nejednakost na lijevoj strani kako biste dobili da je zadani izraz veći ili jednak od nekog fiksnog broja.

9. Supstituirajte izraze $(a+b),(b+c),(c+a)$, primijenite zadatak 8..

10. *1. hint*
Primijetite da je zadana nejednakost ekvivalentna sa sljedećom:

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4}$$

2. hint
Primijenite KA nejednakost.

11. Primijenite AG nejednakost na svaki par brojeva s lijeve strane i zbrojite te nejednakosti.

12. Primijenite AG nejednakost na $(n+1)$ brojeva.

13. Dodajte i oduzmite a s lijeve strane nejednakosti.

14. Primijetite da iz uvjeta zadatka vrijedi $a^2 < a, b^2 < b, c^2 < c$.

15. *1. hint*
Dokažite da je svaki od pribrojnika manji ili jednak 1.
2. hint
Primijenite AG nejednakost na dio nazivnika svakog pribrojnika.

16. *1. hint*
Raspišite $x_0 - x_n$ kao $x_0 - x_1 + x_1 - x_2 + ... + x_{n-1} - x_n$.
2. hint
Primijenite zadatak 8.

17. *1. hint*
Primijenite AG nejednakost na nazivnike razlomaka s lijeve strane.
2. hint
Primijenite KA nejednakost na tako dobivenu nejednakost.

18. *1. hint*
Koristite uvjet $a+b+c=1$ u svakom nazivniku i primijenite AG nejednakost na cijeli nazivnik.
2. hint
Primijenite AH nejednakost na tako dobiveni rezultat.

19. Odredite formulu za volumen, primijenite sličnu ideju kao u 13. zadatku i primijenite AG nejednakost.

Rješenja

1. *1. način*
Zadanu nejednakost množimo sa 2 i dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

Oduzimanjem $2ab + 2bc + 2ca$ s obje strane i zapisivanjem u obliku kvadrata binoma dobivamo:

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$

Kako je kvadrat nenegativan broj, onda je lijeva strana suma nenegativnih brojeva pa zbrajanjem nejednakosti dobivamo da je i ona nenegativna.
2. način - ovo je dokaz samo za pozitivne realne brojeve
Kao u prvom rješenju, zadanu nejednakost množimo sa 2 i dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

Primijenimo AG nejednakost na $\frac{a^2+b^2}{2}$ i dobivamo:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Analogno dobivamo i

$$b^2 + c^2 \geq 2bc$$
$$c^2 + a^2 \geq 2ca$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo traženu nejednakost.
Napomena.
Primijetite da je sljedeća nejedakost ekvivalentna AG nejednakosti:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

2. Primjenom AG nejednakosti na svaki faktor s lijeve strane dobivamo

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8abc$$

što je i trebalo dokazati.

3. Kao i u prethodnom zadatku, primjenom AG nejednakosti na svaki faktor s lijeve strane dobivamo

$$(1 + a^x)(1 + a^y)(1 + a^z) \geq 2\sqrt{1 \cdot a^x} \cdot 2\sqrt{1 \cdot a^y} \cdot 2\sqrt{1 \cdot a^z} = 8\sqrt{a^x a^y a^z} = 8\sqrt{a^{x+y+z}} = 8\sqrt{a^0} = 8$$

AG nejednakost smijemo primijeniti s obzirom da su članovi na koje primijenjujemo pozitivni brojevi.
Preostaje odrediti kada vrijedi jednakost.
Dokazali smo da jednakost vrijedi (samo) kada su svi članovi na koje primijenjujemo KAGH nejednakosti jednaki.
Dakle u ovom slučaju jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$1 + a^x = 1 + a^y = 1 + a^z$$

Odnosno

$$a^x = a^y = a^z$$
$$x = y = z$$

4. Pomnožimo nejednakost sa $\sqrt{x^2 + 1}$ (kako je taj broj pozitivan, nejednakost i dalje vrijedi i ekvivalentna je prethodnoj). Dobivamo

$$x^2 + 2 \geq 2\sqrt{x^2 + 1}$$
$$\iff (x^2 + 1) + 1 \geq 2\sqrt{x^2 + 1}$$

Primjenom AG nejednakosti na $(x^2 + 1) + 1$ dobivamo traženu nejednakost.
Analogno, jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$x^2 + 1 = 1$$
$$x^2 = 0$$
$$x = 0$$

5. Primjenom AG nejednakosti na $a_k + 1$ dobivamo:

$$a_k + 1 \geq 2\sqrt{a_k}$$

Dobivamo:

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_n + 1) \geq 2^n \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

Korištenjem uvjeta zadatka vrijedi

$$2^n \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n} = 2^n$$

iz čega slijedi i tražena nejednakost.
Jednakost vrijedi ako i samo ako $a_1 = 1, a_2 = 1, ..., a_n = 1$.

6. Primjenom AG nejednakosti na $p^2 + p + 1$ dobivamo:

$$p^2 + p + 1 \geq 3\sqrt[3]{p^2 \cdot p \cdot 1} = 3p$$

Analogno dobivamo;

$$q^2 + q + 1 \geq 3q$$

Množenjem ovih nejednakosti dobivamo traženu nejednakost

$$(p^2 + p + 1)(q^2 + q + 1) \geq 9pq$$

7. *KA nejednakost*
Želimo dokazati:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Prvo dokažimo nejednakost za sve nenegativne realne brojeve.
Lako se dokaže da je nejednakost ekvivalentna sljedećoj nejednakosti:

$$\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2}{n^2}$$

$$\iff n \cdot (x_1^2 + ... + x_n^2) \geq (x_1 + x_2 + ... + x_n)^2$$

Sada raspisivanjem izraza s desne strane, prebacivanjem na lijevu stranu nejednakosti i zapisivanjem izraza u obliku sume kvadrata binoma dobivamo ekvivalentnu nejednakost:

$$\sum_{i,j: i \neq j} (x_i - x_j)^2 \geq 0$$

Ta nejednakost vrijedi s obzirom na činjenicu da je svaki kvadrat nenegativan.
Sada dokažimo da KA nejednakost vrijedi za sve realne brojeve.
Po prethodnom dokazu imamo

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

za nenegativne realne brojeve.
Uzmimo $x_i' = |x_i|$, dakle vrijedi:

$$\sqrt{\frac{x_1'^2 + ... + x_n'^2}{n}} \geq \frac{x_1' + x_2' + ... + x_n'}{n}$$

No, također imamo:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{x_1'^2 + ... + x_n'^2}{n}} \geq \frac{x_1' + x_2' + ... + x_n'}{n} \geq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

čime je dokaz završen.
GH nejednakost
Želimo dokazati

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}$$

što je ekvivalentno sa:

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}$$

Po AG nejednakosti imamo:

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}$$

$\blacksquare$

8. Za minimalnu vrijednost izraza (označimo ju sa t) mora vrijediti sljedeće:

- izraz je uvijek veći ili jedak od te vrijednosti ($x + \frac{1}{x} \geq t$)
- moguće je postići tu vrijednost

Ako primijenimo AG nejednakost na zadani izraz, dobivamo

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$

Sada dokažimo da je moguće postići da izraz poprima vrijednost 2.
Jednakost se poprima ako i samo ako je

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{x} \\ \iff x^2 &= 1 \\ \iff x &= 1 \end{aligned}$$

(s obzirom da je zadano da je x pozitivan). Kako zadana jednadžba ima rješenja (ima jedinstveno rješenje), vrijednost 2 se postiže, a lako je i uvrstiti $x = 1$ te se vidi da se vrijednost 2 stvarno postiže.

9. *Za Nesbittovu nejednakost postoji više dokaza, ovdje ću prikazati jedan od njih.*
Krenimo od lijeve strane nejednakosti;

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3 = (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3$$

Uvedimo nove oznake:

$$\begin{aligned} x &:= a + b \\ y &:= b + c \\ z &:= c + a \end{aligned}$$

Vrijedi $(a + b + c) = \frac{x+y+z}{2}$
Sada imamo:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 = \frac{x+y+z}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 3$$

i trebamo dokazati;

$$\frac{x+y+z}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 3 \geq \frac{3}{2}$$

$$\iff (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-6\geq 3$$

Množenjem izraza na lijevoj strani dobivamo:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-6=\frac{x}{x}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{z}{z}-6=3+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-6$$

Po zadatku 8. vrijedi da je

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$$
$$\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geq 2$$
$$\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geq 2$$

Pa je

$$3+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-6\geq 3+22+2-6=3$$

što je i trebalo dokazati.

10. Zadana nejednakost je ekvivalentna sljedećoj:

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geq\frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\iff \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}$$

pri čemu ova zadnja nejednakost vrijedi po KA nejednakosti.

11. Po AG nejednakosti vrijedi:

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq 2\sqrt{\frac{ab^2c}{ac}}=2b$$

Analogno vrijedi:

$$\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}\geq 2a$$
$$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq 2c$$

Zato vrijedi:

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)\geq\frac{1}{2}(2a+2b+2c)=a+b+c$$

što je i trebalo dokazati.

12. Vrijedi:

$$\sqrt[n+1]{ab^n}=\sqrt[n+1]{abb\cdots b}\leq\frac{a+b+b+..+b}{n+1}=\frac{a+nb}{n+1}$$

pri čemu srednja nejednakost vrijedi po AG nejednakosti na brojevima $a,b,...,b$ (b se ponavlja n puta), a iz ovoga slijedi tvrdnja zadatka.

13. Vrijedi:

$$b+\frac{1}{a(b-a)}=(b-a)+a+\frac{1}{a(b-a)}\geq 3\sqrt[3]{a\cdot(b-a)\cdot\frac{1}{a(b-a)}}=3$$

Dakle, izraz je veći ili jednak 3, a za $a=1,b=2$ se postiže vrijednost 3, dakle to je i minimum izraza.

14. Državno natjecanje 2019., SŠ A-1.3.

15. Državno natjecanje 2019., SŠ A-3.4.

16. Državno natjecanje 2009., SŠ A-4.2.

17. Državno natjecanje 2015. SŠ A-1.3.

18. Državno natjecanje 2015. SŠ A-2.4.

19. Volumen kutije je $(a-2x)^2x$, vrijedi $a, x \in \mathbb{R}, 2x < a$ i $x, a > 0$.
Trebamo odrediti maksimalnu vrijednost tog izraza.

$$(a-2x)^2x = (a-2x)(a-2x)x = \frac{1}{4}(a-2x)(a-2x)\cdot 4x$$

Po AG nejednakosti vrijedi:

$$\frac{a-2x+a-2x+4x}{3} \geq \sqrt[3]{(a-2x)(a-2x)\cdot 4x}$$

$$\left(\frac{a-2x+a-2x+4x}{3}\right)^3 \geq (a-2x)(a-2x)\cdot 4x$$

$$(a-2x)(a-2x)\cdot 4x \leq \left(\frac{a-2x+a-2x+4x}{3}\right)^3$$

Uvrštavanjem ove nejednakosti u gornju nejednakost dobivamo:

$$\frac{1}{4}(a-2x)(a-2x)\cdot 4x \leq \frac{1}{4}\left(\frac{a-2x+a-2x+4x}{3}\right)^3 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2a}{3}\right)^3 = \frac{2a^3}{27}$$

Cilj je dokazati da je to maksimum i odrediti za koji x se postiže.
Jednakost u ovoj AG nejednakosti vrijedi ako i samo ako je

$$a-2x = a-2x = 4x$$

$$6x = a$$

$$x = \frac{a}{6}$$

Dakle, postoji rješenje ove jednadžbe za svaki a pa se postiže jednakost, odnosno dobivena vrijednost je maksimum.
Tada vrijedi $x = \frac{a}{6}$ pa je to rješenje.

Literatura

[1] Arthur Engel. *Problem-solving strategies*. Springer, 1998. URL: http://gimnazija-izdijankoveckoga-kc.skole.hr/upload/gimnazija-izdijankoveckoga-kc/multistatic/748/Problem-Solving_Strategies_Engel.pdf.