Znamenke

S9	Seniorska grupa

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2019./2020.

Goran Ivanković

18.1.2019.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

mnm.hr   Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"   matematicari.mnm

Uvod

U ovom predavanju pozabavit ćemo se zadacima sa znamenkama.

Brojevni sustavi Opće je poznato da zapisujemo brojeve koristeći 10 znamenaka. Takav zapis zovemo dekadski zapis nekog broja. Vrijedi: $\overline{x_n \cdots x_2 x_1} = 10^n x_n + \cdots + 10x_2 + x_1$.
No brojevi se također mogu zapisati u nekoj drugoj bazi. Primjerice računala koriste binarni sustav samo sa znamenkama 0 i 1.
Općenito pišemo $\overline{x_n \cdots x_2 x_1} = b^n x_n + \cdots + bx_2 + x_1$, te vrijedi $x_n, \cdots, x_1 \in \{0, 1, \cdots, n\}$.

Lakši zadaci

1. Nađi posljednju znamenku broja $1! - 2! + 3! - 4! + \cdots + 99!$
2. Postoji li 8-znamenkast broj bez 0 u dekadskom zapisu, koji pri dijeljenju sa svojom prvom znamenkom daje ostatak 1, pri dijeljenju sa drugom daje ostatak 2, ... , te pri dijeljenju sa osmom daje ostatak 8.
3. U kojem brojevnom sustavu 297—792 (tj. 297 dijeli 792)?
4. Dokaži da je broj čiji se dekadski zapis sastoji od 3^k znamenki 1 djeljiv s 3^k
5. Peteroznamenkastom broju suma znamenka jednaka je 37 i djeljiv je s 37. Dokaži da mu je treća znamenka 9.
6. Ako se dvoznamenkastom broju pribroji umnožak njegovih znamenaka, dobije se kvadrat zbroja tih znamenaka. Odredi sve takve brojeve.
7. Nađite sve prirodne brojeve s barem tri znamenke u kojima svake dvije uzastopne znamenke cine kvadrat prirodnog broja.
8. Može li suma znamenaka kvadrata nekog broja biti 2013?
9. Odredi, ako postoje, najmanji i najveci prirodni broj kojem je umnožak znamenaka 18 900.
10. Odredite sve 200-znamenkaste prirodne brojeve (u dekadskom zapisu) koji su kvadrati prirodnih brojeva, a pocinju s 99 devetki.

Teži zadaci

11. Za koje $n \in \mathbb{N}$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da n^k ima istu prvu i zadnju znamenku u bazi 10?
12. Nađi sve četveroznamenkaste brojeve oblika $\overline{aabb}$ koji su potpuni kvadrati.
13. Posljednja znamenka broja n^{9102} je 9. Odredi posljednju znamenku broja n^{2019} (n je prirodan broj).
14. Dokažite da postoji broj oblika $\overline{...1995}$ djeljiv sa 1999.
15. $A = 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots 2014$. Nađi posljednju znamenku broja A ako se zna da je $A \equiv 1 \mod 3$.

Rješenja

1. rj