S8	Seniorska grupa

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2019./2020.

Algebra - mix za natjecanja

Josip Pupić

11.01.2020.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

mnm.hr Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić" matematicari.mnm

Uvod

Cilj ovog predavanja je prema zadacima sa starih općinskih i županijskih natjecanja te ostalim zadacima slične težine, proći veći broj algebarskih tehnika primjenjivih na tim stupnjevima natjecanja. Kroz prvi primjer, zadatak koji je sam po sebi prilično težak, detaljnije ćemo proučiti metode faktorizacija, uvijek korisne u algebarskim zadacima na hrvatskim natjecanjima. Potom ćemo se baviti zadacima sa starih hrvatskih općinskih i županijskih natjecanja te zadacima slične težine i problematike.

Teški primjer za zagrijavanje

1. Neka su $x, y \in \mathbb{R}$. Pokaži da vrijedi $x^3 + 3xy(x+y) + y^3 \leq 1$, ako i samo ako vrijedi $x^3 + 3xy + y^3 \leq 1$.

Primijetimo da je prva nejednakost zapravo $(x+y)^3 \leq 1$, što je ekvivalentno nejednakosti $x + y \leq 1$.
U drugoj nejednakosti pak ne primjećujemo odmah jednostavnu faktorizaciju. Prebacimo li sve na jednu stranu, promatramo izraz $S = x^3 + y^3 + 3xy - 1$. Faktorizacija nekog od izraza 3. stupnja s $3xy$ ne izgleda lijepo niti korisno. Primijetimo da jedina donekle očita faktorizacija je razlika ili zbroj kubova kojima baratamo (x^3, y^3 i 1). Nećemo faktorizirati $x^3 + y^3$ jer onda nemamo što napraviti s jedinicom kasnije. No, kako bismo očuvali simetriju, jedinicu raspolavljamo i radimo razlike kvadrata s polovicama od x^3 i y^3. Dolazimo do

$$S = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{y^3}{2} - \frac{1}{2}\right) + 3xy = \frac{1}{2}(x-1)(x^2+x+1) + \frac{1}{2}(y-1)(y^2+y+1) + \frac{x^3}{2} + \frac{y^3}{2} + 3xy$$

Ponovno nemamo neku očitu faktorizaciju. Međutim, preostala 2 "velika" izraza možemo probati "spojiti" u 1. Primijetimo da u jednom imamo zagradu $(x-1)$, a u drugom $(y-1)$. Dodajmo sada i oduzmimo što je potrebno kako bi obje te zagrade postale $(x+y-1)$. Još jedan pokazatelj da idemo u dobrom smjeru je i to što ciljamo dobiti $x + y \leq 1$ na kraju, što je zapravo $x + y - 1 \leq 0$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}(x+y-1)(x^2+x+1) + \frac{1}{2}(x+y-1)(y^2+y+1) + (\frac{x^3}{2} + \frac{y^3}{2} + 3xy) - \frac{1}{2}y(x^2+x+1) - \frac{1}{2}x(y^2+y+1) \\
&= \frac{1}{2}(x+y-1)(x^2+x+1+y^2+y+1) - \left(\frac{1}{2}(x^2y+xy+y+xy^2+xy+x)\right) + (\frac{x^3}{2} + \frac{y^3}{2} + 3xy) \\
&= \frac{1}{2}(x+y-1)(x^2+y^2+x+y+2) - \frac{x^2y+y+xy^2+x}{2} + 2xy + \frac{x^3+y^3}{2}
\end{aligned}$$

Sada je jasno i da u nefaktoriziranom ostatku "ciljamo" na faktor $(x+y-1)$. Prigodno, imamo 2 izraza 3 stupnja $-\frac{x^2y}{2}$ i $-\frac{xy^2}{2}$ ptakva da kada im dodamo xy pomnožen s prikladnim koeficijentom dobivamo

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}(x+y-1)(x^2+y^2+x+y+2) - \frac{1}{2}(x^2y+xy^2) + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}(x+y) + \frac{3}{2}xy + \frac{x^3+y^3}{2} \\
&= \frac{1}{2}(x+y-1)(x^2+y^2+x+y+2) - \frac{1}{2}xy(x+y-1) - \frac{1}{2}(x+y) + \frac{x^3+y^3+3xy}{2} \\
&= \frac{1}{2}(x+y-1)(x^2+y^2+x+y+2-xy) - \frac{1}{2}(x+y) + \frac{x^3+y^3+3xy}{2}
\end{aligned}$$

Primijetimo, treći član u posljednjoj sumi je vrlo sličan početnom izrazu pa ga možemo probati svesti upravo na to. Dobivamo

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(x+y-1)(x^2+y^2+x+y+2-xy) - \frac{1}{2}(x+y) + \frac{x^3+y^3+3xy-1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x+y-1)(x^2+y^2+x+y+2-xy) - \frac{1}{2}(x+y-1) + \frac{S}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x+y-1)(x^2+y^2+x+y+2-xy-1) + \frac{S}{2} \end{aligned}$$

Odnosno, napokon smo uspješno faktorizirali S i to kao

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}(x+y-1)(x^2+y^2+x+y-xy+1) = \frac{1}{2}(x+y-1)(2x^2+2y^2+2x+2y-2xy+2)$$

Naposlijetku, primijetimo da se posljednja zagrada može zapisati kao

$$(x-y)^2+(x+1)^2+(y+1)^2$$

što je očito nenegativno za sve realne brojeve x, y. Dakle, $S \leq 0$ je ekvivalentno s $x+y-1 \leq 0$, čemu je ekvivalentna i prva nejednakost u zadatku pa smo pokazali ekvivalenciju dviju danih nejednakosti.

Zadaci

1. Dokažite da za svaki prirodni broj n i nenegativan realan broj a vrijedi nejednakost

$$n(n+1)a+2n \geq 4\sqrt{a}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n})$$

2. Riješite jednadžbu

$$\log(\tan 1^\circ)+\log(\tan 2^\circ)+...+\log(\tan 89^\circ)=\cos 2x$$

3. Riješite jednadžbu

$$x^2+10x\cdot\sin(xy)+25=0$$

4. Suma triju pozitivnih brojeva α, β i γ iznosi $\frac{\pi}{2}$. Izračunajte

$$ctg(\alpha)\cdot ctg(\gamma),$$

ako je poznato da $ctg(\alpha)$, $ctg(\beta)$ i $ctg(\gamma)$ čine artimetički niz.

5. Dani su realni brojevi a, b i c veći od 1. Dokaži sljedeću nejednakost

$$\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab \geq 4(\log_{ab} c+\log_{bc} a+\log_{ca} b)$$

6. Neka je $P(x)=ax^2+bx+c$, gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$ uz $a \neq 0$. Odredi sva rješenja jednadžbe

$$P(x^2+4x-7)=0$$

ako je poznato da je jedno od njih jednako 1 i barem jedno rješenje je dvostruko.

7. Dokaži da za svaki prirodni broj n veći od 2 vrijedi

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n} < 1$$

8. Nađi sva pozitivna realna rješenja sustava

$$x+y=2$$
$$xy-z^2=1$$

Hintovi

1. HINT 1: Korijeni na desnoj strani upućuju na korištenje aritmetičko-geometrijske nejednakosti.
   HINT 2: Primijetimo da je $n(n+1) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 2(1+2+...+n)$.

2. Probajmo upariti neke članove sume na lijevoj strani i pojednostavniti njihov zbroj.

3. Koristimo činjenicu da je $-1 \leq \sin(xy) \leq 1$.

4. HINT 1: Iz činjenice da neka 3 broja čine artiemtički niz, možemo izraziti bilo koji od njih preko druga 2.
   HINT 2: Do izraza $ctg(\alpha) \cdot ctg(\gamma)$ možemo doći pomoću neke adicijske formule.

5. HINT 1: Primijetimo da za $x, y > 1$ vrijedi $\log_x y = \frac{\log x}{\log y}$.
   HINT 2: Uvedimo supstitucije $x = \log a$, $y = \log b$ i $z = \log c$.

6. HINT 1: Uvrštavanje nultočke 1 omogućuje nam faktorizaciju polinoma $P(x)$ te $P(Q(x))$ gdje je $Q(x) = x^2 + 4x - 7$.
   HINT 2: Vieteove formule.

7. HINT: Za lijevu nejednakost prolazi trivijalna ograda. Za desnu probajte naći ogradu na sličan način, ali ne primijeniti ju na sve članove sume.
   ALTERNATIVNI HINT: Indukcija.

8. A-G nejednakost.

Rješenja

1. Općinsko natjecanje 2007. - 4. razred, 4. zadatak, A kategorija

2. Općinsko natjecanje 2007. - 3. razred, 3. zadatak, B kategorija

3. Županijsko natjecanje 2007. - 3. razred, 3. zadatak, A kategorija

4. Županijsko natjecanje 2007. - 4. razred, 1. zadatak, B kategorija

5. Županijsko natjecanje 2008. - 3. razred, 1. zadatak, A kategorija

6. Županijsko natjecanje 2008. - 3. razred, 2. zadatak, A kategorija

7. Županijsko natjecanje 2008. - 4. razred, 3. zadatak, A kategorija

8. Primijetimo da je po A-G nejednakosti $x + y \geq 2\sqrt{xy}$. Stoga je $2 \geq 2\sqrt{xy}$, odnosno $\sqrt{xy} \leq 1$. Sada kvadriranjem zaključujemo $xy \leq 1$. Međutim, iz druge jednadžbe sustava imamo $xy = 1 + z^2$ pa je $1 + z^2 \leq 1$ tj. $z^2 \leq 0$. No, znamo da je kvadrat svakog realnog broja nenegativan pa je nužno $z = 0$. Stoga mora biti $xy = 1$, odnosno u primijenjenoj A-G nejednakosti imamo slučaj jednakosti koji implicira jednakost $x = y$. Slijedi jedino rješenje $x = y = 1$, $z = 0$.