J8	Juniorska grupa

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2019./2020.

Algebra mix

Katja Varjačić

11.1.2020.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

mnm.hr Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić" matematicari.mnm

Uvod

U ovom predavanju pozabavit ćemo se s algebrom za natjecanja u 1. i 2. srednje. Ponovit ćemo algebarske izraze i neke korisne ideje, te ćemo raditi malo teleskopiranje, jednadžbe i nejednakosti.

Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivni realni brojevi. Tada su njihova **kvadratna**, **aritmetička**, **geometrijska** i **harmonijska** sredina redom:

$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}, \quad A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \quad G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}, \quad H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$

i vrijedi $K \geq A \geq G \geq H$.
Jednakost između bilo koje dvije od njih se postiže samo u slučaju kada je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Teleskopiranje je metoda koju koristimo da bi evaluirali kompliciranu sumu, tako da ju svedemo na puno jednostavniji izraz, tako što pribrojnike zapišemo na drugi način ili rastavimo na više pribrojnika što nam omogućuje masovno kraćenje.

Primjer:

Evaluirajte sljedeći izraz:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}$$

Rješenje:

Koristit ćemo sljedeću transformaciju: $\frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} =$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

Uvodni zadaci

1. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$
2. $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$
3. $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$
4. Neka su $a, b, c, d > 0$ takvi da $a + b + c + d = 1$ Dokaži:

$$\frac{1}{4a + 3b + c} + \frac{1}{3a + b + 4d} + \frac{1}{a + 4c + 3d} + \frac{1}{4b + 3c + d} \geq 2$$

Zadaci

5. Za tri realna broja a, b, c vrijedi:
$$a^2b + b^2c + c^2a = ab^2 + bc^2 + ca^2.$$
Dokaži da su barem dva od ta tri broja jednaka.

6. Neka su m, n prirodni brojevi, $n > 1$.
   (a) Dokaži da je $n^4 + n^2 + 1$ složen.
   (b) Dokaži da je $m^4 + 4n^4$ složen.

7. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$.
   (a) Dokaži da vrijedi:
   $$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2].$$
   (b) Kada vrijedi jednakost $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$?
   (c) Faktoriziraj $x^3 + 3xy + y^3 - 1$.
   (d) Faktoriziraj $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$.

8. (Ideja racionalizacije) Odredi
$$\frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{10}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{397} + \sqrt{400}}$$

9. (Ideja parcijalnih razlomaka) Odredi
$$\frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{3^2 - 1} + \ldots + \frac{1}{n^2 - 1}$$

10. (Ideja unakrsnog kraćenja razlomaka) Odredi
$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2019^2}\right)$$

11. Odredi sve realne brojeve x koji zadovoljavaju jednadžbu
$$\sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 + 8}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{x^2 + 8}} = 8$$

Malo teži zadaci

12. Dani su realni brojevi a, b, c različiti od 0 takvi da vrijedi:
$$a^2 + a = b^2, \qquad b^2 + b = c^2, \qquad c^2 + c = a^2$$
Dokaži da je $(a - b)(b - c)(c - a) = 1$.

13. Izračunaj:
$$\frac{3}{1! + 2! + 3!} + \frac{4}{2! + 3! + 4!} + ... + \frac{2019}{2017! + 2018! + 2019!}.$$

14. Neka su x, y i z kompleksni brojevi takvi da $x + y + z = 2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ i $xyz = 4$. Odredite vrijednost izraza:
$$\frac{1}{xy + z - 1} + \frac{1}{yz + x - 1} + \frac{1}{zx + y - 1}.$$

Hintovi

1. Probajte namjestiti lijevu stranu nejednakosti na AG nejednakost, tako da ju primijenite 3 puta.

2. Probajte primijeniti AG nejednakost.
3. Izmnožite lijevu stranu i primijenite AG nejednakost.
4. Probajte primijeniti AH nejednakost.
5. Probajte faktorizirati izraz tako da dobite (a-b)(b-c)(c-a)=0.
6. Probajte faktorizirati izraze svodeći ih na razlike kvadrata.
7. U a) dijelu izmnožite lijevu stranu da biste dobili desnu, a u ostalim podzadatcima probajte primijeniti a) dio.
8. Probajte racionalizirati svaki od razlomaka zasebno kako bi se riješili korijena u nazivniku, kako biste mogli lakše pokratiti neke članove.
9. Svaki od razlomaka probajte zapisati kao razliku neka dva razlomka kao u uvodnom primjeru.
10. Iskoristite razliku kvadrata te probajte grupirati faktore u dvije zagrade, tako da se u svakoj zagradi unakrsno pokrate brojnici i nazivnici susjednih razlomaka.
11. Uvedite supstituciju $a = \sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+8}}$, $b = \sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+8}}$.
12. HINT 1: Sumirajte dane jednadžbe i koristite dobivenu jednakost.
    HINT 2: U svakoj jednadžbi iskoristite razliku kvadrata.
13. HINT 1: Teleskopiranje
    HINT 2: Probajte faktorizirati nazivnike i skratiti svaki od razlomaka, te zatim razdvojiti na parcijalne razlomke.
14. HINT 1: Faktoriziraj nazivnik.
    HINT 2: Kombiniraj uvjete za dobivanje nepoznatih izraza.

Rješenja

1. Zadatak ćemo riješiti tako da grupiramo članove na lijevoj strani i primijenimo AG nejednakost 3 puta.

$$a^2+b^2+c^2 = \frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2}+\sqrt{b^2c^2}+\sqrt{c^2a^2} = ab+bc+ca$$

2. Primijenit ćemo AG nejednakost na izraz na lijevoj strani.

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = abc$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$$

3. Zadatak ćemo riješiti tako da izmnožimo faktore na lijevoj strani i primijenimo AG nejedankost.

$$(a+b)(b+c)(c+a) = abc+a^2b+ac^2+a^2c+b^2c+b^2a+bc^2+abc \geq 8\sqrt[8]{a^8b^8c^8} = 8abc$$

4.

$$\frac{1}{4a+3b+c}+\frac{1}{3a+b+4d}+\frac{1}{a+4c+3d}+\frac{1}{4b+3c+d} \geq 2$$

Kako bismo dokazali, iskoristit ćemo AH nejednakost.

$$\frac{\frac{1}{4a+3b+c}+\frac{1}{3a+b+4d}+\frac{1}{a+4c+3d}+\frac{1}{4b+3c+d}}{4} \geq \frac{4}{(4a+3b+c)+(3a+b+4d)+(a+4c+3d)+(4b+3c+d)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4a+3b+c}+\frac{1}{3a+b+4d}+\frac{1}{a+4c+3d}+\frac{1}{4b+3c+d} \geq \frac{16}{8(a+b+c+d)} = \frac{16}{8} = 2$$

5.

$$\begin{aligned} a^2b+b^2c+c^2a &= ab^2+bc^2+ca^2 \\ \Leftrightarrow ab(a-b)+c(b^2-a^2)+c^2(a-b) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-b)(ab-ac-bc+c^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-b)(a(b-c)-c(b-c)) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-b)(b-c)(a-c) &= 0 \end{aligned}$$

Slijedi da je barem jedan od pribrojnika $a-b$, $b-c$, $a-c$ jednak 0, to jest vrijedi $a=b$ ili $b=c$ ili $a=c$, a to smo i trebali dokazati.

6. (a) $n^4+n^2+1 = n^4+2n^2+1-n^2 = (n^2+1)^2-n^2 = (n^2+1-n)(n^2+1+n)$

   (b) $m^4+4n^4 = m^4+4m^2n^2+4n^4-4m^2n^2 = (m^2+2n^2)^2-(2mn)^2 = (m^2+2n^2-2mn)(m^2+2n^2+2mn)$

7. (a) Direktnim izmnažanjem slijedi:

$$\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc.$$

   (b) Jednakost vrijedi kada je desna strana izraza pod (a) jednaka 0, a to će vrijediti za $a+b+c=0$ ili $a=b=c$.

   (c) Svodimo zadanu jednakost na izraz iz podzadatka (a):

$$x^3+3xy+y^3-1 = x^3+y^3+(-1)^3-(-1)xy = \frac{1}{2}(x+y-1)[(x-y)^2+(y+1)^2+(x+1)^2].$$

   (d) Primijetimo da vrijedi $(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$ pa možemo iskoristiti jednakost iz podzadatka (b):

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x).$$

8. (Ideja racionalizacije - ideja je racionalizirati svaki od razlomaka zasebno kako bi se riješili korijena u nazivniku)

$$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{397}+\sqrt{400}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{7}}\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{4})}{(\sqrt{7}-\sqrt{4})}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}\frac{\sqrt{10}-\sqrt{7}}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{397}+\sqrt{400}}\frac{\sqrt{400}-\sqrt{397}}{\sqrt{400}-\sqrt{397}} =$$

$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{4}}{3}+\frac{\sqrt{10}-\sqrt{7}}{3}+\ldots+\frac{\sqrt{400}-\sqrt{397}}{3} =$$

$$\frac{\sqrt{400}-\sqrt{4}}{3} = \frac{20-2}{3} = 6$$

9. (Ideja parcijalnih razlomaka)

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\ldots+\frac{1}{n^2-1} =$$

$$\frac{1}{(2-1)(2+1)}+\frac{1}{(3-1)(3+1)}+\frac{1}{(4-1)(4+1)}+\ldots+\frac{1}{(n-1)(n+1)} =$$

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}) =$$

$$\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

10. (Ideja unakrsnog kraćenja razlomaka)

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2019^2}\right)=$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2019}\right)\left(1+\frac{1}{2019}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\cdots\frac{2018}{2019}\frac{2020}{2019}=$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4}\cdots\frac{2018}{2019}\right)\left(\frac{3}{2}\frac{4}{3}\frac{5}{4}\cdots\frac{2020}{2019}\right)=\frac{1}{2019}\frac{2020}{2}=\frac{1010}{2019}$$

11. 1. način
Uvedimo supstituciju $a=\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+8}}$, $b=\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+8}}$, zatim dobivamo $a+b=8$, $a^3+b^3=2x$, $ab=\sqrt[3]{x^3-(x^2+8)}=-2$. Sada računamo

$$8^3=(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)=2x+3\cdot(-2)\cdot 8$$

$$2x=512+48$$

$$x=280$$

2. način
Kubirat ćemo obje strane tako da koristimo $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$$x+\sqrt{x^2+8}+x-\sqrt{x^2+8}+3\cdot\sqrt[3]{(x+\sqrt{x^2+8})(x+\sqrt{x^2-8})}\cdot\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+8}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+8}}\right)=512$$

$$2x+3\cdot\sqrt[3]{x^2-(x^2+8)}\cdot 8=512$$

$$2x+3\cdot(-2)\cdot 8=512$$

$$x=280$$

12. Izvor.

13. 101 problems in aglebra - Introductory problems - Problem 13

14. 101 problems in aglebra - Introductory problems - Problem 39