S6	Seniorska grupa

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2019./2020.

Enumerologija

Ivan Novak

7.12.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

mnm.hr   Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"   matematicari.mnm

Osnovne tehnike

A i B su konačni skupovi.

- Ako imam 4 srebrne vilice i 5 zlatnih vilica, onda imam 9 vilica. Ako su A i B disjunktni skupovi, tada je $|A \cup B| = |A| + |B|$.
- Ako imam 3 različite zdjelice i 5 različitih žlica, onda imam 15 različitih parova (zdjelica,žlica). Vrijedi $|A \times B| = |A||B|$.
- Ako svakoj od svojih vilica mogu pridružiti jedinstven nož, onda imam jednako mnogo vilica i noževa. Ako imam jednako vilica i noževa, onda svakoj vilici mogu pridružiti jedinstven nož. Vrijedi $|A| = |B|$ ako i samo ako postoji bijekcija između A i B.
- Ako svoju kolekciju noževa prebrojim na dva različita načina, oba puta ću dobiti isti broj kao rezultat.

Faktorijeli, binomni koeficijenti, binomni poučak

n i k su prirodni brojevi.
Definiramo $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.
Definiramo $\binom{n}{k}$ kao broj k-članih podskupova n-članog skupa.

- Na koliko načina mogu poredati n kornjača?
- Na koliko načina mogu od n kornjača izabrati njih k i poredati ih?
- Dokaži da je $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Dokaži da nakon što izmnožimo $(x+y)^n$ će koeficijent uz $x^k y^{n-k}$ biti upravo $\binom{n}{k}$. Drugim riječima,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Kuglice i štapići

Želimo izračunati broj načina na koje možemo n jednakih kuglica staviti u k različitih kutija.

- Dokaži da je to jednako broju k-torki nenegativnih cijelih brojeva $(x_1, \ldots, x_k)$ za koje vrijedi $x_1 + \ldots + x_k = n$.
- Dokaži da je to jednako broju k-torki prirodnih brojeva $(y_1, \ldots, y_n)$ za koje vrijedi $y_1 + \ldots + y_k = n + k$.
- Dokaži da je to jednako broju neopadajućih funkcija iz skupa $\{1, \ldots, n\}$ u skup $\{1, \ldots, k\}$.
- Dokaži da je to jednako $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Cirkularnosti

- Na koliko načina možemo n ljudi posjesti oko okruglog stola? Dva rasporeda smatramo istima ako je iz jednog moguće doći do drugog rotacijom.
- Definiramo Fibonaccijev niz $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekurzivno tako da vrijedi $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ i $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Popločavamo $n \times 1$ ploču kvadratićima veličine 1×1 i 2×1. Dva popločavanja smatramo istim ako se rotacijom cijele ploče za 180 stupnjeva iz jednog dobije drugo. Dokaži da je broj različitih popločavanja tada jednak $\frac{F_{n+1}+F_{\lfloor n/2 \rfloor +1}}{2}$.

Malo teorije brojeva

- Neka je n prirodan broj kojem je faktorizacija na proste djelitelje $p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$. Koja je formula za broj djelitelja od n?
- Neka je $\varphi(n)$ broj prirodnih brojeva manjih ili jednakih n koji su relativno prosti s n. Dokaži da je

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Formula uključivanja i isključivanja (FUI)

Neka su $A_1, A_2, \ldots A_n$ konačni skupovi. Vrijedi sljedeća formula:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{S \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|S|+1} |\bigcap_{i\in S} A_i|.$$

Raspetljajmo ovu naizgled ružnu formulu. Lijeva strana broji sve x koji su u nekom od skupova $A_1, \ldots, A_n$. Recimo da je element x u k skupova, bez smanjenja općenitosti neka su to $A_1, \ldots, A_k$. Tada su pribrojnici na desnoj strani koji broje x svi oni kojima je pripadni S neprazan podskup od $\{1, \ldots, k\}$. Ako podskup ima parno elemenata, predznak je minus, a inače je plus.

- Dokaži da je broj podskupova od $\{1, \ldots, k\}$ s parno elemenata jednak broju podskupova s neparno elemenata.
- Iz prethodne tvrdnje zaključi da je formula uključivanja i isključivanja istinita.
- U školi je 40 učenika. 19 ih trenira nogomet, 25 ih trenira košarku, 16 ih trenira tenis, 8 ih trenira nogomet i tenis, 5 ih trenira košarku i tenis, 7 ih trenira nogomet i košarku. Koliko ih trenira sva 3 sporta?

Još zadataka

1. Na koliko načina možemo ispuniti n x n tablicu brojevima 0 i 1 tako da je suma brojeva u svakom stupcu i svakom retku parna?
2. Marko je nacrtao pravokutnik dimenzija 20×15 i crtama ga podijelio na jedinične kvadrate. Koliko ukupno pravokutnika ima na toj slici?
3. Koliko ima deveteroznamenkastih brojeva čije su znamenke 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9, a nikoje tri uzastopne znamenke nisu ni 123, ni 246, ni 678?
4. Na ploči dimenzija 5×7 kojoj su sva polja bijela, potrebno je obojati točno 17 polja crnom bojom tako da nastali raspored crnih i bijelih polja na ploči bude centralnosimetričan, tj. da se ne mijenja rotacijom za 180 stupnjeva oko središta ploče. Na koliko je načina to moguće napraviti?
5. Na šahovskom turniru svaki igrač igra protiv svakog drugog točno jednom i nijedna dvojica nisu odigrali neriješenu partiju. Broj partija koje je pobijedio i-ti igrač označimo s a_i, a broj partija koje je izgubio s b_i. Dokaži da vrijedi $\sum a_i^2 = \sum b_i^2$.
6. Neka je p neparan prosti broj. Za prirodan broj k takav da $1 \leq k \leq p-1$, broj djelitelja od $kp+1$ između k i p označimo s a_k. Odredi vrijednost izraza $a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1}$.

Faktorijeli, binomni koeficijenti, binomni poučak

- Na $n!$ načina, prvu biram na n načina, drugu na $n-1$ itd.
- Na $n(n-1)\dots(n-k+1)$ načina, isto rezoniranje kao u pretthodnoj točkici.
- Poredamo brojeve u neki redoslijed na $n!$ načina. Prvih k će činiti k-člani podskup, a preostli neće. Kako redoslijed elemenata u podskupu i izvan podskupa nije bitan, podijelimo s $k!$ i $(n-k)!$.
- Biramo k zagrada iz kojih ćemo uzeti x na $\binom{n}{k}$ načina.

Kuglice i štapići

- x_i je broj kuglica u i-toj kutiji.
- Napravimo bijekciju $(x_1, \dots, x_k) \to (x_1+1, \dots, x_k+1)$.
- x_i je veličina praslike od i. To jedinstveno definira funkciju.
- Biramo iz skupa $\{1, \dots, n+k-1\}$ nekih $k-1$ brojeva. To će biti $y_1, y_1+y_2, \dots, y_1+y_2+\dots+y_{k-1}$. Time su jedinstveno određeni $y_1, \dots, y_k$, a odabir možemo napraviti na točno $\binom{n+k-1}{k-1}$ načina.

Cirkularnosti

- Prvo ih permutiramo na neki od $n!$ načina. Međutim, svakom sjedenju korespondira n permutacija, pa je potrebno podijeliti sve s n. Dakle, odgovor je $(n-1)!$. Alternativno, možemo fiksirati tko sjedi na stolici broj 1 i permutirati ostalih $n-1$ na $(n-1)!$ načina.
- Dokažimo prvo da je broj popločavanja $n \times 1$ ploče jednak F_{n+1}. Za $n=1$ i za $n=2$ se lako provjeri. Pretpostavimo da vrijedi za sve $k < n$.

  Broj popločavanja $n \times 1$ ploče koja završavaju s dominom je jednak broju popločavanja $(n-2) \times 1$ ploče, a broj popločavanja koje završavaju s jednominom je broj popločavanja $(n-1) \times 1$ ploče. Prema pretpostavci, zbroj ta dva broja je $F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$, kao što je i trebalo pokazati.

  Broj ploča koje rotacijom za 180 ostanu iste je onda $F_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$. $\frac{F_{n+1} + F_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}}{2}$ je onda upravo broj traženih ploča: one ploče koje rotacijom ostanu iste brojimo jednom, a sve ostale '1/2 puta' jer i njima asocirane ploče 'doprinose s 1/2' u zbroj.

Malo teorije brojeva

- Biramo za svaki prost broj s kojim će eksponentom dijeliti djelitelja, to možemo na $a_i + 1$ načina, pa je formula upravo $(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_k+1)$.
- Promotrimo razlomke oblika $\frac{k}{n}$, gdje je $k \in \{1, \dots, n\}$. Ima ih n. Skratimo ih. Nazivnici su svi mogući djelitelji od n. Brojnici iznad nazivnika d za svaki djelitelj d su brojevi manji ili jednaki d koji su relativno prosti s d. Takvih ima $\varphi(d)$. Prosumiramo po svim djeliteljima i dobijemo traženu jednakost.

Formula uključivanja i isključivanja (FUI)

- Promotrimo funkciju koja parnom podskupu S daje skup $S\Lambda\{n\}$. To je bijekcija iz skupa parnih podskupova u neparne. Alternativno, raspišemo $(1-1)^n$ po binomnom poučku.
- Elemenata desne strane koji sadrže x koji imaju pozitivan predznak ima za točno jedan više od onih s negativnim predznakom jer x nije u praznom skupu, pa neparnih podskupova ima za 1 više.
- Neka je A skup ljudi koji trenira nogomet, B tenis, C košarku. Tada je $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$, odnosno $40 \geqslant 19 + 16 + 25 - 8 - 5 - 7 + |A \cap B \cap C|$, odnosno $|A \cap B \cap C| \leqslant 0$, dakle nitko ne trenira sva 3 sporta.

Još zadataka

1. Gornji $(n-1) \times (n-1)$ ispunimo bilo kako, to jedinstveno određuje ispunjenost ostatka tablice. Još treba argumentirati zašto je donje desno polje uvijek moguće ispuniti tako da odgovara i suma zadnjeg retka i suma zadnjeg stupca. Ispunimo ga tako da odgovara zadnjem retku. Tada je zbroj cijele tablice paran, pa odgovara i zadnjem stupcu. Dakle, odgovor je $2^{(n-1)^2}$.

2. Odgovor je $\binom{21}{2}\binom{16}{2}$, jer je to broj načina za izabrati pozicije lijeve, desne, gornje i donje stranice.

3. 2017. Školsko natjecanje za 4. razred

4. 2014. Školsko natjecanje za 4. razred

5. Vrijedi $a_i + b_i = n-1$, i vrijedi $\sum a_i = \sum b_i$, pa je $\sum a_i^2 - b_i^2 = \sum (a_i - b_i)(a_i + b_i) = (n-1) \sum (a_i - b_i) = (n-1) \cdot 0 = 0$, kao što je trebalo dokazati.

6. Suma zapravo broji koliko ima parova (j,k) takvih da je $j \in \{1, \ldots, p-1\}$, $k \in \{1, \ldots, j\}$ i $j \mid kp+1$. Kako su j i p relativno prosti, za svaki j postoji točno jedan takav k, pa je suma jednaka $p-1$.