

## Potencija točke

**Potencija točke  $T$  na kružnicu  $k$ :** Neka je  $k$  kružnica i  $T$  neka točka u ravnini. Neka je  $s$  pravac koji prolazi točkom  $T$  i dira kružnicu u barem jednoj točki. Neka su to točke  $A$  i  $B$  (mogu biti ista točka). Potencija točke  $T$  na kružnicu  $k$  je umnožak  $|TA| \cdot |TB|$ .

1. Dana je točka  $T$  i kružnica  $k$ . Kroz  $T$  su povučena dva pravca koji sijeku danu kružnicu u  $A$  i  $B$ , odnosno  $C$  i  $D$ . Dokažite da vrijedi  $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$ .
2. **Poučak o kutu tangente i tetive** Vrhom  $C$  trokuta  $\triangle ABC$  povučena je tangenta na opisanu kružnicu tog trokuta. Neka je  $T$  proizvoljna točka na toj tangenti tako da se točke  $A$  i  $T$  nalaze na različitim stranama pravca  $BC$ . Dokažite  $\angle TCB = \angle CAB$ .
3. Vrhom  $C$  trokuta  $\triangle ABC$  povučena je tangenta na opisanu kružnicu tog trokuta. Neka je  $T$  presjek pravca  $AB$  i te tangente. Dokažite  $|TA| \cdot |TB| = |TC|^2$ .

Umnožak iz 3. zadatka naziva se **potencija točke  $T$**  na kružnicu upisanu trokutu  $\triangle ABC$ .

4. Dan je četverokut  $ABCD$  i točka  $T$  na presjeku pravaca  $AB$  i  $CD$  tako da vrijedi  $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$ . Dokažite da je dani četverokut tetivan.

Neka je  $k$  kružnica, te neka je  $O$  središte, a  $r$  radijus te kružnice. Kažemo da je **potencija točke  $T$  u odnosu na kružnicu  $k$**  :  $|PO|^2 - r^2$ . (Hint: Neka su  $A$  i  $B$  točke u kojima pravac  $OT$  sječe kružnicu  $k$ ). Po konvenciji, potencija točke  $P$  je pozitivna ako je izvan kruga, a negativna ako je unutar kruga. Kada je  $P$  izvan kruga potencija točke  $P$  jednaka je kvadratu udaljenosti tangente na  $P$  od  $P$  do kružnice.

## Radikalna os

Geometrijsko mjesto svih točaka koje imaju jednaku potenciju na dvije kružnice je pravac pa ćemo stoga taj pravac nazvati **radikalna os**.

5. Neka su  $k_1$  i  $k_2$  dvije kružnice koje se sijeku u točkama  $A$  i  $B$ . Dokažite da je pravac  $AB$  geometrijsko mjesto svih točaka koje imaju jednaku potenciju na obje kružnice.
6. Dane su kružnice  $k_1$  i  $k_2$  koje se sijeku u  $K$  i  $L$  te zajednička tangenta na te dvije kružnice koja ih dira u točkama  $A$  i  $B$ , tim redom. Neka je  $M$  točka na presjeku pravaca  $AB$  i  $KL$ . Dokažite da je  $|AM| = |BM|$ .
7. Neka su  $k_1$  i  $k_2$  dvije kružnice. Dokažite da je geometrijsko mjesto točaka koje imaju jednaku potenciju na obje kružnice pravac okomit na spojnicu središta tih kružnica.

## Zadaci

8. Kružnice  $k_1$  i  $k_2$ , radijusa  $r_1$  i  $r_2$ , dodiruju se izvana u točki  $A$ . Na kružnici  $k_1$  odabrana je točka  $B$  i  $|AB| = a$ . Neka je  $T$  diralište kružnice  $k_1$  i tangente na tu kružnicu povučene iz točke  $B$ . Izrazite  $|BT|$  pomoću  $r_1$ ,  $r_2$  i  $a$ .
9. Dane su tri kružnice  $k_1$ ,  $k_2$  i  $k_3$  te pravci  $s_1$ ,  $s_2$  i  $s_3$  koji su redom radikalne osi parova kružnica  $(k_1, k_2)$ ,  $(k_2, k_3)$  i  $(k_1, k_3)$ . Dokažite da su  $s_1$ ,  $s_2$  i  $s_3$  paralelni pravci ako su središta danih kružnica kolinearna, a u suprotnom prolaze istom točkom. Ta točka zove se radikalno središte.

10. Dvije kružnice,  $k_1$  i  $k_2$ , sijeku se u točkama  $S$  i  $T$ . Neka je  $P$  točka na pravcu  $ST$ . Na  $k_1$  odabrane su točke  $A$  i  $B$ , a na  $k_2$  odabrane su  $C$  i  $D$  takve da su  $A, B$  i  $P$  te  $C, D$  i  $P$  kolinearne. Dokažite da je četverokut  $ABCD$  tetivan.
11. Dan je trokut  $ABC$  i točka  $T$  na pravcu  $AB$  takva da vrijedi  $|TA| \cdot |TB| = |TC|^2$ . Dokažite da je pravac  $TC$  tangenta na kružnicu opisanu trokutima  $ABC$ .
12. Dan je paralelogram  $ABCD$  takav da je  $\angle ABC > 90^\circ$ , odnosno  $|AC| > |BD|$ . Opisana kružnica trokuta  $BCD$  siječe dijagonalu  $\overline{AC}$  po drugi put u točki  $M$ . Dokažite da je pravac  $BD$  zajednička tangenta na kružnice opisane trokutima  $ABM$  i  $ADM$ .
13. Na stranicama  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$  odabrane su redom točke  $D, E$  i  $F$  takve da je četverokut  $BCEF$  tetivan. Neka je  $T$  drugo sjecište kružnica opisanih trokutima  $BDF$  i  $CDE$ . Dokažite da su točke  $A, D$  i  $T$  kolinearne.
14. Na stranicama  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$  odabrane su redom točke  $E$  i  $F$  takve da su pravci  $EF$  i  $BC$  paralelni. Dokažite da se kružnice kojima su  $\overline{BE}$  i  $\overline{CF}$  promjeri sijeku na pravcu koji prolazi vrhom  $A$ , a okomit je na stranicu  $\overline{BC}$  trokuta.

### Teži zadaci

15. Neka su  $k_1$  i  $k_2$  dvije kružnice koje se ne sjeku. Dokažite da je geometrijsko mjesto središta kružnica koje su ortogonalne na njih njihova radikalna os. (Dvije su kružnice ortogonalne ako se sijeku i tangente povučene na te kružnice u njihovom sjecištu su međusobno okomite.)
16. Neka su  $A, B, C$  i  $D$  kolinearne točke tim redoslijedom. Kružnice promjera  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$  sijeku se u točkama  $X$  i  $Y$ . Neka je  $P$  točka na pravcu  $XY$  koja se ne nalazi na pravcu  $AB$  te neka su  $M$  i  $N$  drugi presjeci pravaca  $CP$  i  $BP$  s kružnicama nad  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$ , tim redom. Dokažite da se pravci  $AM, DN$  i  $XY$  sijeku u jednoj točki.
17. Neka je  $ABC$  šiljastokutan trokut s ortocentrom  $H$  i  $D$  točka na stranici  $\overline{BC}$ . Neka su  $E$  i  $F$  redom nožišta visina iz vrhova  $B$  i  $C$ . Neka je  $k_1$  kružnica opisana trokutima  $BDF$  i točka  $X$  takva da je  $\overline{DX}$  promjer kružnice  $k_1$ . Analogno su definirane kružnice  $k_2$  i  $Y$ . Dokažite da su točke  $X, Y$  i  $H$  kolinearne.

## Potencija točke, radikalna os

27.3.2016.

### Uvodni zadatci

#### Zadatak 1.

Dana je točka  $T$  i kružnica  $k$ . Kroz  $T$  su povučena dva pravca koji sijeku danu kružnicu u  $A$  i  $B$ , odnosno  $C$  i  $D$ . Dokažite da vrijedi  $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$ .

#### Rješenje.

Neka su točke  $A, B, C$  i  $D$  vrhovi četverokuta tim redom. Trokuti  $TAD$  i  $TCB$  imaju zajednički kut pri  $T$  te su kutevi  $\sphericalangle TAD$  i  $\sphericalangle TCB$  jednaki jer je četverokut tetivan. Naime,  $\sphericalangle TAD = 180^\circ - \sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$ . Sada slijedi da su ta dva trokuta slična pa imamo  $\frac{|TA|}{|TD|} = \frac{|TC|}{|TB|}$ , iz čega dobivamo  $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$ .

#### Zadatak 2.

(**Poučak o kutu tangente i tetive**) Vrhom  $C$  trokuta  $ABC$  povučena je tangenta na opisanu kružnicu tog trokuta. Neka je  $T$  proizvoljna točka na toj tangenti tako da se točke  $A$  i  $T$  nalaze na različitim stranama pravca  $BC$ . Dokažite  $\sphericalangle TCB = \sphericalangle CAB$ .

#### Rješenje.

Promatramo situaciju kada je trokut  $ABC$  šiljastokutan, a ostale se situacije dokazuju slično.

Neka je  $O$  središte opisane kružnice danog trokuta.  $O$  se nalazi unutar trokuta jer je on šiljastokutan.  $\sphericalangle OCT = 90^\circ$  i  $\sphericalangle OCB = 90^\circ - \sphericalangle CAB$  (uočimo  $\sphericalangle OCB = \sphericalangle OBC = \frac{180^\circ - 2\sphericalangle CAB}{2}$  jer je  $\sphericalangle CAB$  prikladni obodni kut središnjeg kuta  $\sphericalangle COB$ ), pa dobivamo  $\sphericalangle TCB = \sphericalangle CAB$ .

#### Zadatak 3.

Vrhom  $C$  trokuta  $ABC$  povučena je tangenta na opisanu kružnicu tog trokuta. Neka je  $T$  presjek pravca  $AB$  i te tangente. Dokažite  $|TA| \cdot |TB| = |TC|^2$ .

#### Rješenje.

Iz prethodnog zadatka slijedi  $\sphericalangle TCB = \sphericalangle BAC = \sphericalangle TAC$  te još vrijedi  $\sphericalangle BTC = \sphericalangle CTB = \sphericalangle CTA$ . Sada dobivamo  $TCB \sim TAC$  pa slijedi  $\frac{|TC|}{|TB|} = \frac{|TA|}{|TC|}$ , odnosno  $|TA| \cdot |TB| = |TC|^2$ .

Umnošci iz 1. i 3. zadatka još se nazivaju i **potencija točke na kružnicu** (u ovom slučaju, potencija točke  $T$  na opisanu kružnicu trokuta  $ABC$ ). Ako se u 3. zadatku  $AB$  uzme kao promjer lako se vidi da dani umnošci iznose  $|OT|^2 - r^2$ , gdje je  $r$  radijus dane kružnice. U 1. zadatku jednakost danih umnožaka ekvivalentna je tome da je  $ABCD$  tetivan što ćemo dokazati u sljedećem zadatku.

#### Zadatak 4.

Dan je četverokut  $ABCD$  i točka  $T$  na presjeku pravaca  $AB$  i  $CD$  tako da vrijedi  $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$ . Dokažite da je dani četverokut tetivan.

#### Rješenje.

Pretvorimo dani izraz u jednakost omjera  $\frac{|TA|}{|TD|} = \frac{|TC|}{|TB|}$ . Uz to još imamo  $\sphericalangle ATD = \sphericalangle CTB$  pa po *SKS* poučku o sličnosti trokuta dobivamo  $TAD \sim TCB$  te iz toga slijedi  $180^\circ - \sphericalangle BAD = \sphericalangle TAD = \sphericalangle BCT = \sphericalangle BCD$ , pa je dani četverokut tetivan.

## Radikalna os

U nastavku ovog predavanja koristit ćemo pojam **geometrijskog mjesta točkaka**. Pod pojmom geometrijskog mjesta točkaka podrazumijevamo neki skup točkaka (u ovom predavanju, u ravnini) koji zadovoljava neki zadani uvjet. Najčešće će geometrijsko mjesto točkaka biti neki poznati geometrijski objekt (krivulja, geometrijski lik, ...). Na primjer, ako u ravnini zadamo neke dvije točke,  $A$  i  $B$ , geometrijsko mjesto svih točkaka koje su jednako udaljene od točkaka  $A$  i  $B$  jest pravac (simetrala dužine  $\overline{AB}$ ), dok je geometrijsko mjesto svih točkaka  $T$  takvih da je kut  $\sphericalangle ATB$  pravi kružnica promjera  $\overline{AB}$  (bez točkaka  $A$  i  $B$ ).

Pokazat ćemo da je geometrijsko mjesto svih točkaka koje imaju jednaku potenciju na dvije kružnice pravac pa ćemo stoga taj pravac nazvati **radikalna os**. Iz formule  $|OT|^2 - r^2$  vidimo da postoji više točkaka koje imaju međusobno jednake potencije na jednu kružnicu, a to su sve točke na kružnici koncentričnoj s promatranom. Šta se događa kada je  $|OT| < r$ ? Za te slučajeve uzet ćemo da je potencija negativna (u skladu s prethodnom formulom). U suprotnom, kada bismo za iznos potencije uzimali umnožak iz 1. zadatka, neke bi točke izvan kružnice imale jednaku potenciju na tu kružnicu kao i neke točke unutar.

### Zadatak 5.

Neka su  $k_1$  i  $k_2$  dvije kružnice koje se sijeku u točkama  $A$  i  $B$ . Dokažite da je pravac  $AB$  geometrijsko mjesto svih točkaka koje imaju jednaku potenciju na obje kružnice.

Slijedi jedan zadatak u kojemu možemo vidjeti kako se koristi potencija točke iz prethodnog zadatka.

### Zadatak 6.

Dane su kružnice  $k_1$  i  $k_2$  koje se sijeku u  $K$  i  $L$  te zajednička tangenta na te dvije kružnice koja ih dira u točkama  $A$  i  $B$ , tim redom. Neka je  $M$  točka na presjeku pravaca  $AB$  i  $KL$ . Dokažite da je  $|AM| = |BM|$ .

Vidjeli smo da radikalna os postoji i da se lako konstruira za kružnice koje se sijeku, no što s onima koje se ne sijeku? Postoji li njihova radikalna os i kako ju naći i konstruirati? Pokušajmo odgovoriti na to pitanje sljedećim zadatkom.

### Zadatak 7.

Neka su  $k_1$  i  $k_2$  dvije kružnice. Dokažite da je geometrijsko mjesto točkaka koje imaju jednaku potenciju na obje kružnice pravac okomit na spojnicu središta tih kružnica.

Primijetimo da smo u 1. zadatku dokazali koje je traženo geometrijsko mjesto ako se dane kružnice sijeku. U tom slučaju samo preostaje pokazati da je taj pravac stvarno okomit na spojnicu središta. No što sa slučajem kada se ne sijeku? Rješenje ovog problema moći ćete naći na našem YouTube kanalu, a sada slijedi samo mali hint tako da: SPOILER ALERT!!!. Hint: Pokušajmo prvo naći barem jednu točku koja ima jednaku potenciju na obje kružnice, a onda, budući da želimo pokazati da je naš traženi skup točkaka pravac okomit na spojnicu središta, konstruirajmo pravac okomit na tu spojnicu koji prolazi nađenom točkom te za njega dokažimo da je skup svih točkaka s traženim svojstvom. SPOILER END!!!

## Zadaci i rješenja

### Zadatak 8.

Kružnice  $k_1$  i  $k_2$ , radijusa  $r_1$  i  $r_2$ , dodiruju se izvana u točki  $A$ . Na kružnici  $k_1$  odabrana je točka  $B$  i  $|AB| = a$ . Neka je  $T$  diralište kružnice  $k_2$  i tangente na tu kružnicu povučene iz točke  $B$ . Izrazite  $|BT|$  pomoću  $r_1$ ,  $r_2$  i  $a$ .

### Rješenje.

Hint: izrazite potenciju točke  $B$  na kružnicu  $k_2$  na dva načina, koristeći tangentu  $BT$  i pravac  $AB$  (za koji pretpostavite da siječe kružnicu  $k_2$  drugi put u točki  $C$ ).

### Zadatak 9.

Dana je kružnica promjera  $\overline{AB}$  i proizvoljne točke  $D$  i  $C$  na luku  $\widehat{AB}$ .  $E$  je točka na presjeku pravaca  $AD$  i  $BC$ . Dokažite da vrijednost izraza  $|AE| \cdot |AD| + |BE| \cdot |BC|$  ne ovisi o izboru točkaka  $D$  i  $C$ .

**Rješenje.**

Hint: označite sa  $P$  polovište dužine  $\overline{AB}$ , a sa  $N$  nožište okomice iz točke  $E$  na tu dužnu. Preuredite izraz dan u tvrdnji zadatka tako da dobijete izraz za potenciju točke  $E$  na polukružnicu promjera  $\overline{AB}$ , a zatim primijenite Pitagorin poučak i izraze za potenciju točke  $N$  na danu polukružnicu.

**Zadatak 10.**

Dane su tri kružnice  $k_1$ ,  $k_2$  i  $k_3$  te pravci  $s_1$ ,  $s_2$  i  $s_3$  koji su redom radikalne osi parova kružnica  $(k_1, k_2)$ ,  $(k_3, k_2)$  i  $(k_1, k_3)$ . Dokažite da su  $s_1$ ,  $s_2$  i  $s_3$  paralelni pravci ako su središta danih kružnica kolinearna, a u suprotnom prolaze istom točkom. Ta točka zove se **radikalno središte**.

**Rješenje.**

Hint: ako su središta svih triju kružnica kolinearna, onda su radikalne osi paralelne jer su to pravci koji su okomiti na pravac na kojemu ta središta leže. Pretpostavimo da središta nisu kolinearna. Tada se radikalne osi parova kružnica  $(k_1, k_2)$  i  $(k_2, k_3)$  moraju sjeći u nekoj točki  $T$ . No, tada točka  $T$  ima jednaku potenciju na sve tri kružnice  $k_1, k_2, k_3$  pa specijalno mora ležati i na radikalnoj osi para  $(k_3, k_1)$ .

**Zadatak 11.**

Dvije kružnice,  $k_1$  i  $k_2$ , sijeku se u točkama  $S$  i  $T$ . Neka je  $P$  točka na pravcu  $ST$ . Na  $k_1$  odabrane su točke  $A$  i  $B$ , a na  $k_2$  odabrane su  $C$  i  $D$  takve da su  $A, B$  i  $P$  te  $C, D$  i  $P$  kolinearne. Dokažite da je četverokut  $ABCD$  tetivan.

**Rješenje.**

Hint: pokažite da su trokuti  $PAC$  i  $PDB$  slični.

**Zadatak 12.**

Dan je trokut  $ABC$  i točka  $T$  na pravcu  $AB$  takva da vrijedi  $|TA| \cdot |TB| = |TC|^2$ . Dokažite da je pravac  $TC$  tangenta na kružnicu opisanu trokutima  $ABC$ .

**Zadatak 13.**

Dan je paralelogram  $ABCD$  takav da je  $\sphericalangle ABC > 90^\circ$ , odnosno  $|AC| > |BD|$ . Opisana kružnica trokuta  $BCD$  siječe dijagonalu  $\overline{AC}$  po drugi put u točki  $M$ . Dokažite da je pravac  $BD$  zajednička tangenta na kružnice opisane trokutima  $ABM$  i  $ADM$ .

**Rješenje.**

Hint: iskoristite prethodni zadatak.

**Zadatak 14.**

Na stranicama  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$  odabrane su redom točke  $D$ ,  $E$  i  $F$  takve da je četverokut  $BCEF$  tetivan. Neka je  $T$  drugo sjecište kružnica opisanih trokutima  $BDF$  i  $CDE$ . Dokažite da su točke  $A$ ,  $D$  i  $T$  kolinearne.

**Zadatak 15.**

Na stranicama  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$  odabrane su redom točke  $E$  i  $F$  takve da su pravci  $EF$  i  $BC$  paralelni. Dokažite da se kružnice kojima su  $\overline{BE}$  i  $\overline{CF}$  promjeri sijeku na pravcu koji prolazi vrhom  $A$ , a okomit je na stranicu  $\overline{BC}$  trokuta.

**Rješenje.**

Hint: odredite potencije vrha  $A$  i ortocentra  $H$  trokuta  $ABC$  na te dvije kružnice.

## Teži zadatci

### Zadatak 16.

Neka su  $k_1$  i  $k_2$  dvije kružnice koje se ne sijeku. Dokažite da je geometrijsko mjesto središta kružnica koje su ortogonalne na njih njihova radikalna os.

**Napomena:** dvije su kružnice ortogonalne ako se sijeku i tangente povučene na te kružnice u njihovom sjecištu su međusobno okomite.

### Zadatak 17.

Neka su  $A, B, C$  i  $D$  kolinearne točke tim redoslijedom. Kružnice promjera  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$  sijeku se u točkama  $X$  i  $Y$ . Neka je  $P$  točka na pravcu  $\overline{XY}$  koja se ne nalazi na pravcu  $AB$  te neka su  $M$  i  $N$  drugi presjeci pravaca  $CP$  i  $BP$  s kružnicama nad  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$ , tim redom. Dokažite da se pravci  $AM, DN$  i  $XY$  sijeku u jednoj točki.

### Zadatak 18.

Neka je  $ABC$  šiljastokutan trokut s ortocentrom  $H$  i  $D$  točka na stranici  $\overline{BC}$ . Neka su  $E$  i  $F$  redom nožišta visina iz vrhova  $B$  i  $C$ . Neka je  $k_1$  kružnica opisana trokutu  $BDF$  i točka  $X$  takva da je  $\overline{DX}$  promjer kružnice  $k_1$ . Analogno su definirane kružnice  $k_2$  i  $Y$ . Dokažite da su točke  $X, Y$  i  $H$  kolinearne.

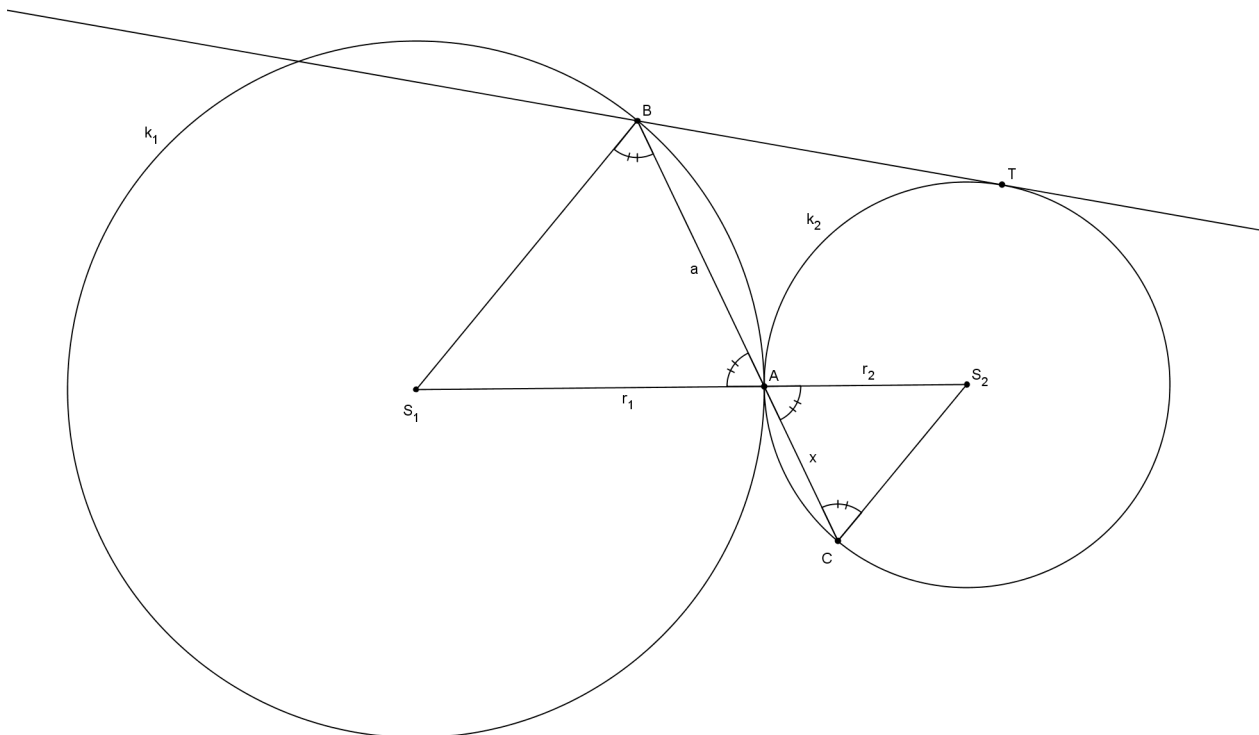
## Rješenja nekih zadataka

Rješenje zadatka 5. Pogledajte ga na [linku](#).

Rješenje zadatka 6. Pogledajte ga na [linku](#).

Rješenje zadatka 7. Pogledajte ga [ovdje](#) i [ovdje](#).

Rješenje zadatka 8.



Neka su  $S_1$  i  $S_2$  redom središta kružnica  $k_1$  i  $k_2$  te neka pravac  $AB$  siječe kružnicu  $k_2$  po drugi put u točki  $C$ . Označimo  $|AC| = x$ . Iz jednakosti potencija točke  $B$  na kružnicu  $k_2$  slijedi

$$|BT|^2 = |BA| \cdot |BC| \Rightarrow |BT|^2 = a(a + x).$$

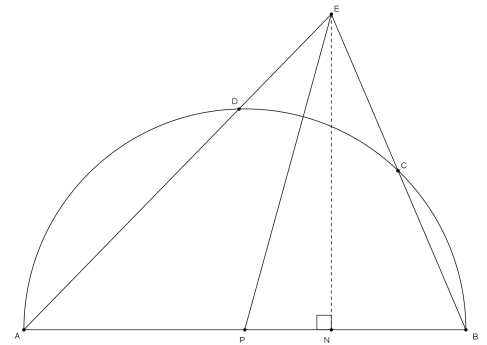
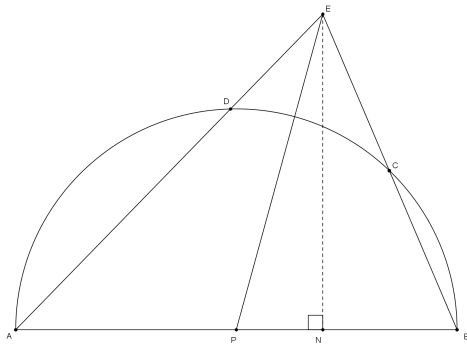
Budući da se kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju u točki  $A$ , točke  $S_1$ ,  $A$  i  $S_2$  su kolinearne. Zato slijedi  $\sphericalangle BAS_1 = \sphericalangle CAS_2$  (to su vršni kutovi), a odavde dobivamo da su trokuti  $BS_1A$  i  $CS_2A$  slični (to su jednakokračni trokuti s jednakim kutovima uz osnovicu). Sada imamo

$$\frac{|BA|}{|S_1A|} = \frac{|CA|}{|S_2A|} \Rightarrow \frac{a}{r_1} = \frac{x}{r_2} \Rightarrow x = \frac{ar_2}{r_1}.$$

Konačno,

$$|BT| = \sqrt{a \left( a + \frac{ar_2}{r_1} \right)} = a \sqrt{1 + \frac{r_2}{r_1}}.$$

Rješenje zadatka 9.



Možemo razlikovati dva slučaja u ovisnosti o tome nalazi li se točka  $E$  unutar ili izvan dane polukružnice (kao što je prikazano na gornjim slikama).

Pretpostavimo da se točka  $E$  nalazi izvan polukružnice. Neka je  $P$  polovište dužine  $\overline{AB}$  te neka je  $N$  nožište okomice iz točke  $N$  na dužinu  $\overline{AB}$ . Označimo  $d = |AE| \cdot |AD| + |BE| \cdot |BC|$ . Vrijedi

$$\begin{aligned} d &= |AE| \cdot (|AE| - |DE|) + |BE| \cdot (|BE| - |EC|) \\ &= |AE|^2 - |AE| \cdot |DE| + |BE|^2 - |BE| \cdot |EC|. \end{aligned}$$

No, znamo da je  $-|AE| \cdot |DE| = -|BE| \cdot |EC|$  jer su oba ta izraza jednaka potenciji točke  $E$  na kružnicu promjera  $\overline{AB}$  (dakle, jednaki su  $r^2 - |EP|^2$ , gdje je  $r$  duljina polumjera te kružnice). Sada (višestrukom) primjenom Pitagorinog poučka dobivamo

$$\begin{aligned} d &= |AN|^2 + |EN|^2 + |BN|^2 + |EN|^2 + 2(r^2 - |EP|^2) \\ &= |AN|^2 + |BN|^2 + 2(|EN|^2 - |EP|^2) + 2r^2 \\ &= |AN|^2 + |BN|^2 - 2|PN|^2 + 2r^2 \\ &= |AN|^2 + |BN|^2 + 2(r^2 - |PN|^2). \end{aligned}$$

No, izraz koji smo dobili u zagradi jednak je potenciji točke  $N$  na kružnicu promjera  $|AB|$ . Zato slijedi

$$d = |AN|^2 + |BN|^2 - 2|AN| \cdot |BN| = (|AN| + |BN|)^2 = |AB|^2,$$

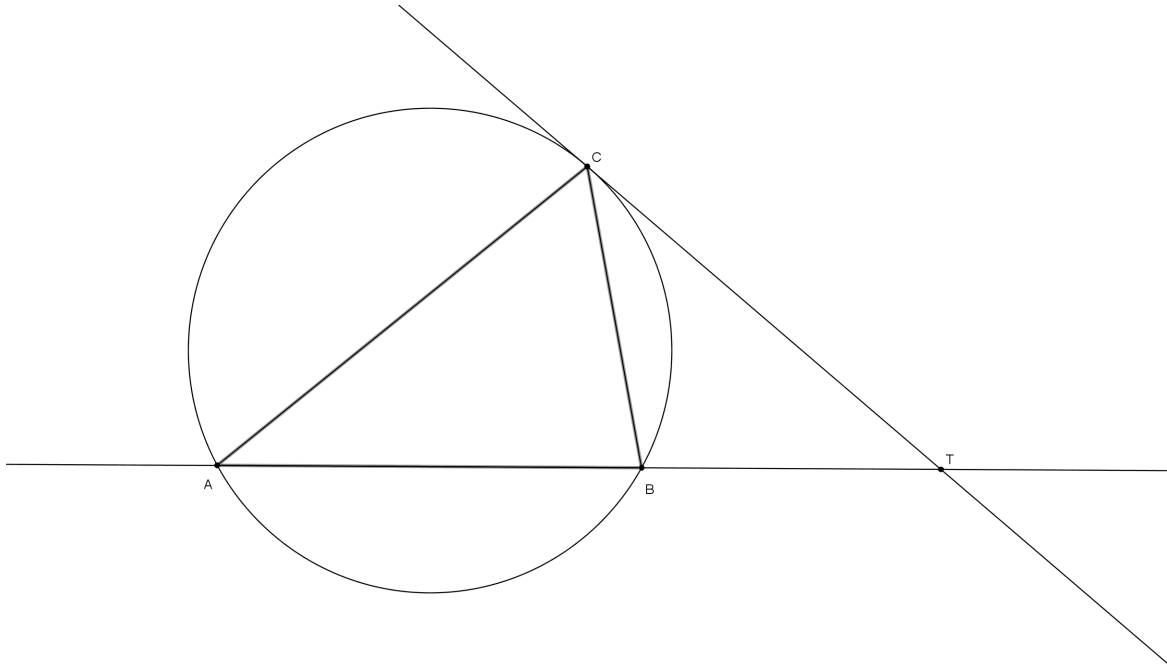
što je vrijednost koja ne ovisi o izboru točaka  $C$  i  $D$ .

Drugi slučaj (kada se  $E$  nalazi unutar polukružnice) dokazuje se potpuno analogno i ostavljamo ga vama za vježbu.

Rješenje zadatka 11. Pogledajte ga na [linku](#).



Rješenje zadatka 12.

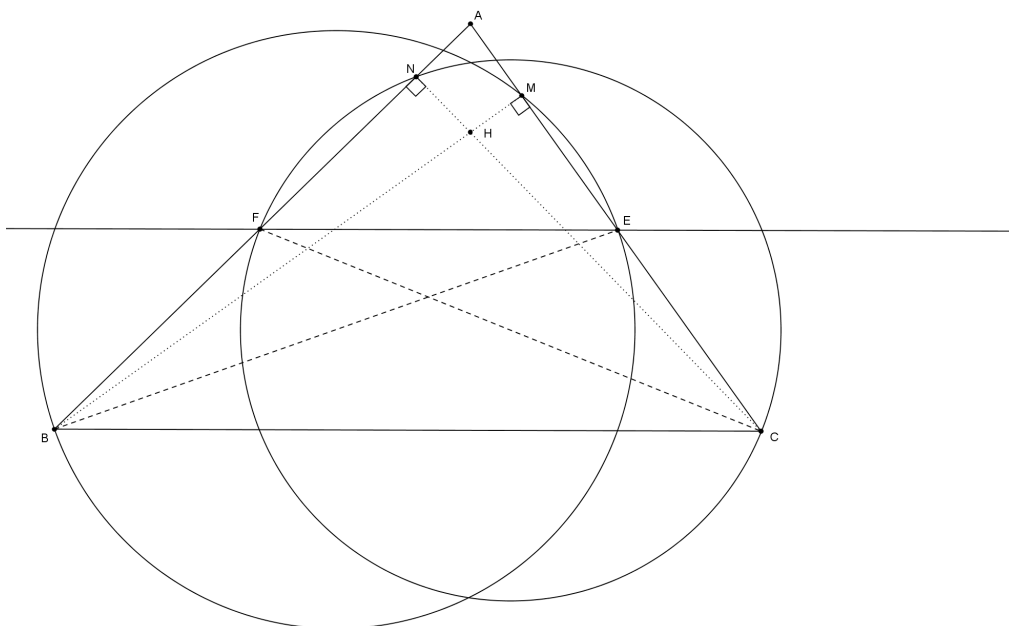


Pretpostavimo da pravac  $TC$  opisane kružnice trokuta  $ABC$  siječe još u točki  $D$ . Tada vrijedi  $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$  (jer su oba ova izraza jednaka potenciji točke  $C$  na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$  ili suprotnoj vrijednosti te potencije). No, budući da je prema pretpostavci zadatka  $|TA| \cdot |TB| = |TC|^2$ , slijedi  $|TC| = |TD|$ , a kako se točke  $C$  i  $D$  na pravcu  $TC$  nalaze s iste strane točke  $T$ , one se podudaraju. Dakle, pravac  $TC$  je uistinu tangenta na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$ .

Rješenje zadatka 13. Pogledajte ga na [linku](#).

Rješenje zadatka 14. Pogledajte ga na [linku](#).

Rješenje zadatka 15.



Kružnica promjera  $\overline{BE}$  prema Talesovom poučku prolazi nožištem okomice iz točke  $B$  na stranicu  $\overline{CA}$ . Označimo tu točku sa  $M$ . Analogno, kružnica promjera  $\overline{CF}$  prolazi nožištem  $N$  okomice iz točke  $C$  na stranicu  $\overline{AB}$ . Znamo da se dužine  $\overline{BM}$  i  $\overline{CN}$  sijeku u ortocentru  $H$  trokuta.

No, vrijedi

$$|BH| \cdot |HM| = |CH| \cdot |HN|.$$

Ova se činjenica može pokazati koristeći sličnost trokuta i ostavljamo je vama za vježbu. To znači da točka  $H$  ima jednake potencije na obje kružnice pa se nalazi na njihovoj radikalnoj osi, tj. pravcu koji prolazi kroz sjecišta tih kružnica.

Nadalje, iz sličnosti trokuta  $AMN$  i  $ABC$  slijedi

$$|AN| : |AM| = |AC| : |AB|.$$

No, zbog paralelnosti pravaca  $EF$  i  $BC$  slijedi

$$|AC| : |AB| = |AE| : |AF|$$

Dakle,

$$|AN| : |AM| = |AE| : |AF| \Rightarrow |AN| \cdot |AF| = |AM| \cdot |AE|.$$

Oдавде slijedi da točka  $A$  ima jednake potencije na obje kružnice pa ona također leži na radikalnoj osi tih kružnica.

Dakle, vidimo da radikalna os tih dviju kružnica prolazi točkama  $A$  i  $H$  što je očito pravac kroz točku  $A$  okomit na stranicu  $\overline{BC}$ .

*Rješenje zadatka 16.* Pogledajte ga [ovdje](#) i [ovdje](#).

*Rješenje zadatka 17.* Pogledajte ga na [linku](#).

*Rješenje zadatka 18.* Pogledajte ga na [linku](#).