J6	Juniorska grupa

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2019./2020.

Uvod u prebrojavanja

Lucija Relić

7. prosinca 2019.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

mnm.hr   Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"   matematicari.mnm

Uvod

U ovom predavanju upoznat ćemo se s osnovnim principima prebrojavanja i primjenjivati ih u raznim kombinatornim zadacima. Prije samog prebrojavanja korisno je odrediti:

- Što točno želim prebrojati? Je li lakše prebrojati nešto s određenim svojstvom ili ono što nema to svojstvo pa oduzeti od ukupnog broja?
- Postoji li neka pravilnost? Mogu li ju uočiti raspisivajući male primjere?
- Mogu li primijeniti neku od karakterističnih metoda i principa (npr. metoda kuglica i štapića, indukcija, Dirichletov princip)?

Neki od osnovnih principa prebrojavanja:

- princip sume (broj elemenata unije disjunktnih skupova jednak je sumi broja elemenata tih skupova - ako imamo 5 jabuka u jednoj košari i 4 kruške u drugoj košari tada imamo ukupno $5 + 4 = 9$ komada voća)
- princip produkta (broj elemenata Kartezijevog produkta konačnih skupova jednak je umnošku broja elemenata skupova - u ormaru imamo 3 jakne i 7 majici, tada imamo $3 \cdot 7 = 21$ parova (jakna, majica))
- princip kvocijenta (reformulacija principa produkta)
- princip bijekcije (dva su skupa ekvipotentna ako i samo ako postoji bijekcija između njih - ako svakoj lijevoj cipeli mogu jedinstveno pridružiti desnu cipelu tada ih imam jednako)
- princip matematičke indukcije (baza, pretpostavka i korak)
- Dirichletov princip (ako $k + 1$ zečeva želimo smjestiti u k kutija barem jedna kutija imat će više od 1 zeca)

Oznake:

- faktorijele: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$ (posebno, $0! = 1$)
- binomni koeficijent (n *povrh* k) označava broj k-članih podskupova n-članog skupa:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Uvodni primjeri

1. (a) Koliko ima različitih četveroznamenkastih brojeva?
   (b) Koliko ima različitih četveroznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke različite?
   (c) Koliko ima različitih četveroznamenkastih brojeva koji ne sadrže znamenku 3?
   (d) Koliko ima različitih četveroznamenkastih brojeva koji sadrže točno jednu znamenku 5?
2. (a) Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 100 koji su djeljivi s 3?
   (b) Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 100 koji su djeljivi s 3 ili 4?
3. Na koliko načina 10 učenika može stati u red?

4. *(malo teži zadatak, ali koristi vrlo bitnu ideju) Na koliko načina možemo od 10 različitih kuglica koje imamo na raspolaganju odabrati njih 7?

Lakši zadaci

5. Marin slaže sendvič za popodnevnu užinu. U hladnjaku mu je majka ostavila 2 različita peciva, 4 vrste sira te 3 različite šunke. Na koliko načina Marin može složiti svoj sendvič, ako između dvije polovice peciva želi staviti točno jednu vrstu sira i točno jednu vrstu šunke?

6. Marko je nacrtao pravokutnik dimenzija 20×15 i crtama ga podijelio na jedinične kvadrate. Koliko ukupno kvadrata ima na toj slici?

7. (a) Na koliko se različitih načina može postaviti n topova na šahovskoj ploči $n \times n$ tako da se topovi ne napadaju? Topove međusobno ne razlikujemo, a konfiguracije koje dobijemo rotiranjem ili zrcaljenjem smatramo različitima.

   (b) Koji bi odgovor bio u slučaju da topove razlikujemo jer su svi međusobno različite boje?

8. Na Zimskom matematičkom kampu 16 učenika i mentora odlučilo je odigrati partiju mafije. Igrači se dijele po ulogama od kojih je jedna voditelj igre. Dok se igra mafija svi sudionici osim voditelja igre moraju sjesti u krug.

   (a) Na koliko načina naših 15 učenika i mentora koji igraju mogu to učiniti? (Dva načina se smatraju istima ako se jedan može dobiti iz drugoga rotacijom kruga.)

   (b) Na koliko načina mogu to učiniti ako Petar i Ana svakako žele sjediti jedno do drugoga?

9. Koliko postoji peteroznamenkastih parnih palindroma?

Umjereni zadaci

10. Zadan je dvanaesterokut s nacrtanim svim stranicama i dijagonalama. Na koliko načina možemo odabrati dužinu s krajnjim točkama u vrhovima dvanaesterokuta?

11. Koliko anagrama ima riječ *MATEMATIKA*?

12. Na koliko načina su učenici i mentori iz 7. zadatka mogli podijeliti uloge ako su uloge: 1 voditelj igre, 5 mafija, 2 doktora, 1 policajac i 7 civila?

13. Odjeljak vagona ima dvije klupe po 4 mjesta. Od 8 putnika njih 3 žele sjediti s licem okrenutim u smjeru vožnje vlaka, 2 u suprotnom smjeru, a ostalima je svejedno. Na koliko se načina putnici mogu smjestiti?

Teži zadaci

14. (a) Koliko ima najkraćih puteva u cjelobrojnoj mreži od točke $(-1, 0)$ do točke $(5, 7)$?

    (b) Koliko je takvih puteva koji ne prolaze točkom $(2, 3)$?

15. Koliko ima peteroznamenkastih prirodnih brojeva s parnim brojem parnih znamenaka?

16. Na raspolaganju imamo 7 olovaka. Na koliko različitih načina možemo odabrati olovke za ponijeti na predavanje? Možemo ponijeti između 0 i 7 olovaka, uključivo.

17. (a) Koliko pozitivnih djelitelja ima broj 600?

    (b) Koliko pozitivnih djelitelja ima proizvoljan prirodni broj n?

18. 100 kvadratnih omotnica različitih veličina raspoređeno je tako da se za svake dvije različite omotnice manja omotnica nalazi unutar veće ili su omotnice jedna izvan druge. Pritom se i u manjoj i u većoj omotnici mogu nalaziti i druge omotnice. Dva rasporeda smatramo različitima ako postoje dvije omotnice koje se u jednom rasporedu nalaze jedna unutar druge, a u drugom ne.

    Koliko ima različitih rasporeda u kojima se unutar najveće omotnice nalaze sve ostale?

Hintovi

1. (a) Prva znamenka može biti bilo koja osim 0, znači da imamo 9 različitih znamenki na raspolaganju za odabrati znamenku tisućica. Na koliko načina možemo odabrati znamenku stotica? Pokušajte iskoristiti princip produkta.
   (b) Prvu znamenku ponovno možemo odabrati na 9 načina (sve osim 0), ali koliko sada imamo izbora za drugu znamenku ako želimo različite znamenke, a jednu iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ smo stavili na prvo mjesto? Sada smijemo birati 0, ali ne smijemo onu koju smo odabrali na prvo mjesto!
   (c) Budući da sada ne želimo da naš broj sadrži znamenku 3, imamo po 1 manje izbor na svakom mjestu!
   (d) Znamenka 5 može stajati na točno jednom od 4 mjesta u broju. Rastavite na slučajeve po tome na kojem mjestu se nalazi 5, a zatim iskoristite princip sume (slučajevi kada je 5 na prvom i npr. drugom mjestu su disjunktni)!
2. (a) Što nam govori $100 = 33 \cdot 3 + 1$?
   (b) Koliko ih ima koji su djeljivi samo s 3? A samo sa 4? Jesmo li nešto brojali više puta?
3. Prvu osobu možemo odabrati na 10 načina. Na koliko načina možemo odabrati drugu osobu? A treću?
4. Pokušajte iskoristiti binomni koeficijent.
5. Iskoristite princip produkta.
6. Koja je najveća moguća duljina stranica kvadrata?
7. (a) Princip produkta. Topovi se međusobno napadaju ako se nalaze u istom retku ili stupcu. To znači da u svakom retku i stupcu možemo imati maksimalno po 1 top.
   (b) Sada ne biramo samo retke/stupce u kojima se topovi nalaze, nego biramo i topove, budući da ih razlikujemo.
8. (a) Možemo bez smanjenja općenitosti fiksirati jednu osobu. Tada, gledajući u jednom smjeru (recimo smjeru kazaljke na satu), biramo po jednu osobu koja će sjediti na sljedećem mjestu.
   (b) Petra i Anu možemo shvatiti kao jednu osobu pa tako sada trebamo smjestiti 14 ljudi u krug. Kako sve Petar i Ana mogu zajedno sjesti?
9. Budući da tražimo palindrome nije potrebno zasebno odabirati svaku znamenku.
10. Odabir dužine ekvivalentan je odabiru 2 različite točke.
11. Različita slova koja imamo na raspolaganju su $\{M, A, T, E, I, K\}$. Oprez, 2 slova M međusobno nisu različita. Ne smijemo previše puta brojati istu "riječ".
12. Slično kao prošli zadatak, različita slova su različite uloge.
13. Prvo smjestimo putnike s izraženom željom mjesta sjedenja, a na kraju one kojima je svejedno. Na kojim mjestima mogu sjediti osobe koje žele sjediti s licem okrenutim u smjeru vožnje vlaka?
14. (a) Najkraći putevi sastoje se samo od pomaka desno i gore, a cijeli put možemo shvatiti kao niz takvih pomaka.
    (b) Princip sume! Koliko je puteva koji prolaze tom točkom? Koliko ih je bez restrikcija?
15. Odvojeno promatraj brojeve kojima je prva znamenka parna i one kojima je prva znamenka neparna.
16. Za svaku od olovaka imamo 2 izbora, možemo ju odabrati ili ne.
17. (a) Rastavite broj na proste faktore.
    (b) $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$
18. Neka su omotnice označene brojevima tako da je najveća označena brojem 1, a najmanja 100. Na koliko načina možemo staviti omotnicu 2? A k?

Rješenja

1. (a) $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$, na prvom mjestu može stajati sve osim znamenke 0, a na ostalima može biti bilo koja od 10 znamenki.
   (b) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$, na prvom mjestu bilo što osim 0, na drugom bilo što osim znamenke koju smo odabrali na prvo mjesto...
   (c) $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$, slično kao (a), ali sada nam znamenka 3 nije dozvoljena znamenka.
   (d) Znamenka 5 može stajati na točno jednom od 4 mjesta u broju. To znači da na jednom mjestu nemamo izbora nego staviti znamenku 5, a na ostala mjesta ne smijemo staviti znamenku 5 (pazite, na prvom mjestu ne smije biti ni 0). Budući da su slučajevi disjunktni koristimo princip sume.

$$\underbrace{1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9}_{\text{5 na prvom mjestu}} + \underbrace{8 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 9}_{\text{5 na drugom mjestu}} + \underbrace{8 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 9}_{\text{5 na trećem mjestu}} + \underbrace{8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1}_{\text{5 na četvrtom mjestu}}$$

2. (a) 100 možemo podijeliti na 33 grupe oblika $\{3k+1, 3k+2, 3k\}$ i ostat će nam jedan broj koji nismo nigdje smjestili (100). Svaka ta grupa ima točno jedan broj djeljiv s 3, a to je $3k$. Zato je broj traženih brojeva jednak 33. Primijetimo da je to cjelobrojni rezultat dijeljenja 100 sa 3.
   (b) Prirodnih brojeva manjih od 100 djeljivih sa 3 ima 33, a djeljivih sa 4 ima $25 = \frac{100}{4}$. Ukupno je to $33 + 25 = 58$. Međutim, još ne možemo koristiti princip sume jer nemamo disjunktne skupove, brojeve djeljive sa 12 (njih ima $\left\lfloor \frac{100}{12} \right\rfloor = 8$) ubrojali smo i u one djeljive sa 3 i u one djeljive sa 4. Zato je rješenje $33 + 25 - 8 = 50$.
3. Prvu osobu u redu možemo odabrati na 10, drugu na 9 (bilo tko osim osobe na prvom mjestu)... Koristimo princip produkta i dobijemo rješenje 10!. Ovo još zovemo i permutacijom skupa.
4. Zamislimo da kuglice želimo poslagati u niz tako da će prvih 7 biti one koje smo odabrali, a ostale ne. Kuglice možemo poslagati u niz na 10! načina (vidi prošli zadatak), ali sada smo neke slučajeve previše puta prebrojali! Poredak kuglica koje smo odabrali (i onih koje nismo) nije nam bitan, što znači da sada trebamo "ubiti permutacije". Permutacija prvih 7 kuglica ima 7!, a ostatka 3!. Rješenje je zato baš binomni koeficijent:

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!(10-7)!}$$

5. Pecivo možemo pdabrati na 2 načina, sir na 4, šunku na 3. Rješenje je $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$.
6. županijsko 2009, SŠ1A, 5
7. (a) Budući da u svakom retku i stupcu smijemo imati po 1 top, za svaki redak biramo stupac u koji ćemo staviti top. U prvom retku top možemo postaviti bilo gdje (n slobodnih mjesta), u drugom retku smijemo ga postaviti bilo gdje osim u stupac u koji smo već stavili top ($n-1$ opcija)... Rješenje je zato $n!$.
   (b) Fiksirajmo opet retke. Sada za svaki redak trebamo odabrati mjesto za top (stupac), ali i top (budući da ih razlikujemo). Tako dobijemo:

$$\underbrace{(n \cdot n)}_{\text{1. redak}} \cdot \underbrace{((n-1) \cdot (n-1))}_{\text{2. redak}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(1 \cdot 1)}_{n\text{-ti redak}} = (n!)^2$$

8. (a) Fiksirajmo jednu osobu (Ne moramo ju birati, inače ćemo kao različite rasporede brojati rasporede nastale rotacijom!). Osobu koja sjedi kraj fiksirane osobe možemo odabrati na 14 načina (bilo tko od ostatka igrača), i tako redom za svako sljedeće mjesto imamo po 1 igrača manje na izbor. Rješenje je zato $(15-1)!$. Alternativno, mogli smo ispermutirati sve igrače i posjesti ih u krug (15!), ali podijeliti s brojem rotacija koje čine isti raspored sjedenja (takvih je po 15).
   (b) Petra i Anu možemo shvatiti kao jednu osobu pa takvih rasporeda sjedenja ima $(14-1)!$, ali Petar i Ana mogu zajedno sjesti na $2! = 2$ načina (Petar lijevo, a Ana desno ili obratno). Zato je sada rješenje $\frac{13!}{2!}$.
9. Na prvom mjestu ne može biti znamenka 0 što znači da niti na zadnjem mjestu peteroznamenkastog parnog palindroma ne smije biti znamenka 0. S druge strane, budući da želimo parni palindrom, prva i zadnja znamenka moraju biti parne. Nadalje, druga i četvrta znamenka mogu biti bilo kakve, ali iste, a za treću znamenku nemamo restrikcije. Iz toga nam slijedi da za prvu znamenku imamo 4 izbora $(2, 4, 6$ ili $8)$, a drugu i treću po 10 izbora (bilo koje znamenke), a za četvrtu i petu znamenku samo po 1 opciju (moraju biti jednake drugoj i prvoj). Rješenje je $4 \cdot 10 \cdot 10 = 400$.

10. Jednu dužinu možemo odabrati biranjem 2 od mogućih 12 točaka. To možemo učiniti na $\binom{12}{2}$ načina. Primijetimo sada da je to ekvivalentno biranju jedne od svih istaknutih dužina. Budući da broj načina za to odabrati mora biti isti (samo smo drugačije interpretirali zadatak), zaključujemo da je ukupan broj dužina točno $\binom{12}{2}$ jer $\binom{12}{2} = \binom{m}{1}$ gdje je m ukupan broj dužina. Sada lakše dobivamo i odgovor na drugo pitanje, budući da trebamo od ukupnog broja dužina odabrati 3, a to možemo na $\binom{\binom{12}{2}}{3}$ načina.

11. *I. način*

    Permutacija slova ima 10!, ali računajući da ista slova razlikujemo. Koristeći ideju iz zadatka 4, trebamo "ubiti permutacije" istih slova (npr. za M to je 2!). Tako dobivamo rješenje $\dfrac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$.

    II. način

    Budući da tražimo anagrame imamo 10 mjesta koje trebamo popuniti slovima riječi *MATEMATIKA*. Za slovo M trebamo odabrati 2 od tih 10 mjesta na koje ćemo ih staviti, za slovo A trebamo 3 mjesta od ostatka $(10 - 2 = 8)$ itd. Dakle, rješenje je

$$\underbrace{\binom{10}{2}}_{\text{M}} \cdot \underbrace{\binom{8}{3}}_{\text{A}} \cdot \underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{T}} \cdot \underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{E}} \cdot \underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{I}} \cdot \underbrace{\binom{1}{1}}_{\text{K}} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$$

12. Slično kao u prošlom zadatku možemo ovo riješiti na 2 načina. Pokazat ćemo prvi način. Imamo 16 ljudi kojima trebamo dodijeliti uloge. Zamislimo ovo na sljedeći način: posložimo 16 stolica u niz i na svaku stavimo papirić sa ulogom tako da to odgovara željenom broju određenih uloga za igru. Sve igrače možemo posjesti na te stolice na 16! načina. Međutim, nije nam bitno jesu li doktori Petar i Ana ili Ana i Petar. Zato moramo "ubiti permutacije", odnosno prebrojati koliko smo puta više brojali raspodjelu uloga time što smo razlikovali slučajeve Petar - Ana i Ana - Petar. Za svaku od uloga brojali smo točno *(broj igrača s tom ulogom)*! puta više raspodjela. Zato je rješenje $\dfrac{16!}{1! \cdot 5! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 7!}$.

13. Odaberimo prvo mjesta na kojima će sjediti 3 putnika u smjeru vožnje, to možemo na $\binom{4}{3}$ jer imamo 4 takva mjesta na raspolaganja. Oni mogu sjediti na tim mjestima u bilo kojem poretku pa imamo 3! (na koliko načina ih možemo posložiti u niz i tim redom im pridružiti mjesto za sjedenje). Slično napravimo i s 2 putnika koji žele sjediti suprotno od smjera vožnje: $\binom{4}{2} \cdot 2!$.

    Za kraj nam je još preostalo smjestiti 3 putnika kojima je svejedno gdje sjede na 3 preostala slobodna mjesta. Za prvo mjesto putnika možemo odabrati na 3 načina, za drugo na 2 i za treće na 3. Tako dobivamo konačno rješenje:

$$\underbrace{\binom{4}{3} \cdot 3!}_{\text{smjer vožnje}} \cdot \underbrace{\binom{4}{2} \cdot 2!}_{\text{suprotan smjer}} \cdot \underbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}_{\text{ostali}}$$

14. (a) Promotrimo najkraće puteve od točke (a, b) do točke (c, d), pri čemu je $a \leq c$ i $b \leq d$. Najkraći putevi u tom slučaju sastoje se samo od pomaka gore i desno, i to točno $(c - a)$ desno i $(d - b)$ gore. Shvatimo li cijeli put kao niz određenog broja znakova G (gore) i D (desno), broj različitih puteva dobit ćemo kao broj različitih takvih nizova. Niz dobijemo odabirom mjesta za znakove (recimo) G, a to možemo učiniti na $\binom{\text{ukupno pomaka}}{\text{pomaka gore}} = \binom{c-a+d-b}{d-b}$ načina.

    Sada uz $a = -1$, $b = 0$, $c = 5$ i $d = 7$ dobivamo rješenje

$$\binom{(5 - (-1)) + (7 - 0)}{7 - 0} = \binom{13}{7}.$$

    (b) Da bismo pronašli odgovor na ovo pitanje potrebno je prebrojati puteve koji prolaze točkom $(2, 3)$ i taj broj oduzeti od ukupnog broja puteva od $(-1, 0)$ do $(5, 7)$.

    Da bi put prolazio zadanom točkom moramo pronaći broj najkraćih puteva od početne točke do usputne zadane točke i od zadane točke do završne točke (i tada primijenimo princip produkta jer zapravo imamo uređen par dva puta). Tako dobivamo da je rješenje

$$\underbrace{\binom{13}{7}}_{\text{svi putevi}} - \underbrace{\binom{2 - (-1) + 3 - 0}{3 - 0}}_{\text{prvi dio puta}} \cdot \underbrace{\binom{5 - 2 + 7 - 3}{7 - 3}}_{\text{drugi dio puta}} = \binom{13}{7} - \binom{6}{3} \cdot \binom{7}{4}.$$

15. županijsko 2003, SŠ4A, 2

16. Budući da svaku olovku možemo i ne moramo staviti u podskup odabranih olovaka, imamo točno 2 mogućnosti za svaku. Ako svaki podskup olovaka shvatimo kao niz 0 i 1 (pri čemu 0 označavam da ta olovka nije odabrana, a 1 da je) trebamo samo naći broj svih takvih uređenih nizova. Za svako od 7 mjesta (imamo 7 olovaka na raspolaganju) imamo 2 opcije (0 ili 1) pa je broj takvih nizova 2^7.

17. (a) Primijetimo da vrijedi $600 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2$. Svaki djelitelj broja 600 možemo konstruirati tako da prostim faktorima 2, 3 i 5 pridružimo neku potenciju s kojom će ući u rastav djelitelja na proste faktore. Neka je α potencija prostog faktora p u rastavu broja 600. Tada za potenciju k od p u djelitelju kojeg konstruiramo mora vrijediti $0 \leq k \leq \alpha$, što je $\alpha + 1$ mogućnost. Koristeći princip produkta (svaki djelitelj je uređena trojka potencija prostih faktora) dobivamo da broj 600 ima $(3+1)\cdot(1+1)\cdot(2+1) = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ djelitelja.

    (b) Broj n možemo rastaviti na proste faktore kao $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Analognim zaključivanjem kao u prethodnom dijelu zadatka dobivamo da je broj djelitelja prirodnog broja n jednak

$$(\alpha_1 + 1)\cdot(\alpha_2 + 1)\cdot \ldots \cdot(\alpha_k + 1).$$

18. državno 2014, SŠ2A, 5