J5	Juniorska grupa

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2019./2020.

Kongruencije i djeljivost

Nera Majtanić
30.11.2019.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

mnm.hr   Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"   matematicari.mnm

Uvod

1 Djeljivost

Definicija. Kažemo da $a \in \mathbb{N}$ dijeli $b \in \mathbb{N}$ ako postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi $b = k \cdot a$. Tada pišemo $a \mid b$.

Primjeri.

$3 \mid 27$ *(*$a = 3, b = 27, k = 9$*)*

$2 \nmid 11$ *(ne postoji* $k \in \mathbb{N}$ *takav da* $11 = k \cdot 2$*)*

Svojstva. Neka su $a, b, c \in \mathbb{Z}$ brojevi za koje vrijedi $a \mid b, a \mid c$ te neka je $x \in \mathbb{Z}$ proizvoljan. Tada vrijedi:

1) $a \mid b + c$
2) $a \mid b - c$
3) $a \mid b \cdot x$

2 Kongruentnost

Definicija. Neka su $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da je broj a kongruentan broju b modulo n ako vrijedi $n \mid a - b$ i pišemo $a \equiv b \pmod{n}$.

Primjeri.

$7 \equiv 1 \pmod{2}$

$9 \equiv 4 \equiv -1 \pmod{5}$

$15 \equiv \pm 3 \pmod{6}$

Svojstva. Za $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

1) $a \equiv a \pmod{n}$
2) $a \equiv b \pmod{n} \implies b \equiv a \pmod{n}$
3) $a \equiv b \pmod{n}$ i $b \equiv c \pmod{n} \implies a \equiv c \pmod{n}$
4) $a \equiv c \pmod{n}$ i $b \equiv d \pmod{n} \implies a + b \equiv c + d \pmod{n}$
5) $a \equiv c \pmod{n}$ i $b \equiv d \pmod{n} \implies a \cdot b \equiv c \cdot d \pmod{n}$
6) $a \equiv b \pmod{n} \implies a^k \equiv b^k \pmod{n}$
7) $ac \equiv bc \pmod{n}$ i $M(c, n) = 1 \implies a \equiv b \pmod{n}$

Vježba: Dokažite navedena svojstva djeljivosti i kongruentnosti koristeći definicije!

Zadaci

1. Odredite sve troznamenkaste prirodne brojeve koji su 15 puta veći od zbroja svojih znamenki.

2. Odredite sve prirodne brojeve n za koje je $\frac{2n-2}{n-3}$ cijeli broj.

3. Dokažite da za $n \in \mathbb{N}$, ako $21 \mid n^2$, tada i $441 \mid n^2$.

4. **(Županijsko 2016., 1.r.)**

   a) Dokažite da ne postoje dva prirodna broja čija je razlika kvadrata jednaka 987654.

   b) Dokažite da ne postoje dva prirodna broja čija je razlika kubova jednaka 987654.

5. Dokažite da za neparni $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n^4 \equiv 1 \pmod{16}$.

6. Neka je n prirodan broj i $S(n)$ suma njegovih znamenaka. Dokažite $n \equiv S(n) \pmod 3$.

7. $50494847...0201 \equiv ? \pmod{11}$
   (Napomena: Prvo pokažite čemu je kongruentan broj $\pmod{11}$.)

8. Pronađite grešku ($x, k \in \mathbb{Z}$):

$$7x \equiv 5 \pmod 6 \iff x \equiv 5 \pmod 6 \iff x = 6k + 5$$

$$7x \equiv 5 \pmod 6 \iff 14x \equiv 10 \pmod 6 \iff 2x \equiv 4 \pmod 3 \iff x \equiv 2 \pmod 3 \iff x = 3k + 2$$

9. Za koje $x \in \mathbb{Z}$ vrijedi:

   a) $3x + 7 \equiv 5 \pmod 8$

   b) $4x + 2 \equiv 6 \pmod 9$

   c) $3x - 2 \equiv 0 \pmod 5$?

10. **(Županijsko 2012., 1.r.)** Odredite sve parove (a, b) cijelih brojeva tako da vrijedi $a(a - b) = b$.

11. Neka su a, b, c prirodni brojevi takvi da $6 \mid a + b + c$. Dokažite da $6 \mid a^3 + b^3 + c^3$.

12. Dokažite: $13 \mid 2^{12n+9} - 5^{4n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

13. Nađite sve cijele brojeve n za koje $365 \mid 9^n + 1$.

14. **(Županijsko 2017., 1.r.)** Odredite sve troznamenkaste prirodne brojeve n za koje n i n^2 imaju iste zadnje 3 znamenke.

15. Nađite sve parove (x, y) prirodnih brojeva za koje vrijedi $2^x - y^2 = 4$.

16. Dokažite da je umnožak zadnje znamenke broja 2^n i sume njegovih znamenaka bez zadnje djeljiv s 3.

17. Pronađite sve (a, b) parove prirodnih brojeva za koje je $\frac{a^2(b-a)}{b+a}$ kvadrat prostog broja p.

Rješenja

1. 135

2. Vrijedi $\frac{2n-2}{n-3} = \frac{2(n-3)+4}{n-3} = 2 + \frac{4}{n-3}$. Da bi traženi razlomak bio cijeli broj, nužno mora i $\frac{4}{n-3}$ biti cijeli broj, tj. $n - 3 \mid 4$. Dakle, mogućnosti za $n - 3$ su $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Sređivanjem i izbacivanjem negativnih rješenja dobivamo $n \in \{1, 2, 4, 5, 7\}$.

3. Da bi prirodni broj bio potpun kvadrat, svi njegovi prosti djelitelji moraju biti kvadrati (odnosno imati parnu potenciju). Kako je $21 = 3^1 \cdot 7^1$ djelitelj od n^2, zaključujemo da je i $21^2 = 441$ djelitelj od n^2.

4. Županijsko natjecanje 2016., 1.r., A varijanta, 2. zadatak

5. Vrijedi $n^4 - 1 = (n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n - 1)(n + 1)(n^2 + 1) \equiv 0 \pmod{16}$. Kako je n neparan, očito je svaki izraz u faktorizaciji paran, a kako u faktorizaciji imamo dva uzastopna parna broja $n - 1$ i $n + 1$, znamo da je (točno) jedan od njih djeljiv s 4, iz čega slijedi tvrdnja zadatka.

6. $n = \overline{a_k a_{k-1} a_{k-2} ... a_1 a_0} = 10^k \cdot a_k + 10^{k-1} \cdot a_{k-1} + ... + 10^1 \cdot a_1 + 10^0 \cdot a_0 \equiv a_k + a_{k-1} + ... + a_1 + a_0 \equiv S(n) \pmod 3$.

7. $n = \overline{a_k a_{k-1} a_{k-2} ... a_1 a_0} = 10^k \cdot a_k + 10^{k-1} \cdot a_{k-1} + ... + 10^1 \cdot a_1 + 10^0 \cdot a_0 \equiv \sum_{i=0}^{k} (-1)^k a_k \equiv \pm a_k \mp a_{k-1} \pm ... - a_1 + a_0 \pmod{11}$.
Sada je računanje kongruencije lako; dobije se $504948...0201 \equiv -2 \pmod{11}$.

8. Prvo, uočimo da greška mora postojati, jer $3k + 2 = 8 \neq 6k' + 5$. Greška se nalazi u drugom redu u prvoj ekvivalenciji; ne vrijedi $6 \mid 7x + 5 \iff 6 \mid 2(7x + 5)$.

9. a) $x \equiv 2 \pmod 8$
   b) $x \equiv 1 \pmod 9$
   c) $x \equiv 4 \pmod 5$

10. Županijsko natjecanje 2012., 1.r., A varijanta, 1. zadatak

11. Uočavanje $x^3 \equiv x \pmod 2$ i $x^3 \equiv x \pmod 3 \implies x^3 \equiv x \pmod 6$, $\forall x \in \mathbb{N}$, iz čega slijedi tvrdnja zadatka.

12. $2^{12n+9} = 2^{3(4n+3)} = 8^{4n+3} \equiv (-5)^{4n+3} \equiv -(5)^{4n+3} \pmod{13}$.
$2^{12n+9} - 5^{4n+1} \equiv -(5)^{4n+3} - 5^{4n+1} \equiv -(5)^{4n+1}(25 + 1) \equiv 0 \pmod{13}$.

13. $365 = 5 \cdot 73$, pa je dovoljno provjeriti djeljivost brojevima 5 i 73.
Djeljivost s 5: $9^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 \pmod 5 \implies 5 \mid 9^n + 1$ za neparan n.
Djeljivost sa 73: Uočimo $9^3 \equiv -1 \pmod{73} \implies 9^6 \equiv 1 \pmod{73} \implies 73 \mid 9^n + 1$ za $n \equiv 3 \pmod 6$.
Jer drugi uvjet implicira prvi, dobivamo da je konačno rješenje $n \equiv 3 \pmod 6$.

14. Županijsko natjecanje 2017., 1.r., A varijanta, 3. zadatak

15. Za $x = 2k, k \in \mathbb{N}$, dobivamo da je razlika dva kvadrata jednaka 4, što nema rješenja u prirodnim brojevima. Stoga uzmimo da je x neparan. Za $x = 1$ očito nema rješenja, prema tome gledamo $x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$. 2^x je potencija broja $2 \geq 8$, pa stoga vrijedi:

$$0 - y^2 \equiv 4 \pmod 8 \implies y^2 \equiv 4 \pmod 8.$$

Slijedi $y = 2a$, a neparan. Podijelimo li početnu jednadžbu s 4, dobivamo $2^{2k-1} - a^2 = 1$. Za $k = 1$ dobivamo rješenje $(x, y) = (3, 2)$, dok za $k > 1$ dobivamo $-a^2 \equiv 1 \pmod 4$, što nema rješenja. Prema tome, $(x, y) = (3, 2)$ je jedino rješenje.

16. Iz dokazane tvrdnje *6. zadatka*, znamo da vrijedi $S(2^n) \equiv 2^n \pmod 3$. Neka je a zadnja znamenka broja 2^n. Imamo:

$$a(S(2^n) - a) \equiv a(2^n - a) \pmod 3.$$

Sada uočimo da, za parni n, $2^n \equiv 1 \pmod 3$, dok za neparni n $2^n \equiv 2 \pmod 3$. Gledamo slučajeve ovisno o kongruenciji od $n \pmod 4$:

1) $n \equiv 0 \pmod 4 \implies a = 6$ ili $2^n = 1$. U oba slučaja dobivamo $a(2^n - a) \equiv 0 \pmod 3$.
2) $n \equiv 1 \pmod 4 \implies a = 2$ i $2^n \equiv 2 \pmod 3$, pa $a(2^n - a) \equiv 2(2 - 2) \equiv 0 \pmod 3$.
3) $n \equiv 2 \pmod 4 \implies a = 4$ i $2^n \equiv 1 \pmod 3$, pa $a(2^n - a) \equiv 4(1 - 4) \equiv 0 \pmod 3$.
4) $n \equiv 3 \pmod 4 \implies a = 8$ i $2^n \equiv 2 \pmod 3$, pa $a(2^n - a) \equiv 8(2 - 8) \equiv 0 \pmod 3$.

17. $\frac{a^2(b-a)}{b+a} = p^2 \iff a^2 b - a^3 = p^2 b + p^2 a \iff b = \frac{a(a^2+p^2)}{a^2-p^2}$. Dijelimo na dva slučaja:

1) $a = kp$, $k \in \mathbb{N}$. Nakon sređivanja dobivamo $b = \frac{kp(k^2+1)}{k^2-1}$. Ako je k paran, nazivnik nužno mora dijeliti p, točnije $p = k^2 - 1$, što daje rješenje $p = 3$ i $k = 2$, odnosno $(a, b) = (6, 10)$. Ako je k neparan, nazivnik je djeljiv s 4, pa da bi i brojnik bio, nužno mora biti $p = 2$. No tada imamo $k^2 - 1 \mid 2k^3 + 2k \implies k^2 - 1 \mid 4k$, što nema rješenja.
2) $a \neq kp$. Tada je $\gcd(a^2 - p^2, a^2 + p^2) = 1$ ili 2. Ako je 1, tada $a + p \mid a$, što je nemoguće. Dakle, mora biti 2. Sada imamo $a^2 - p^2 \mid 2a \mid 2a^2 \implies a^2 - p^2 \mid 2p^2$, pa je $a^2 - p^2 \in \{1, 2, p, 2p, p^2, 2p^2\}$, što opet nema rješenja.

Slijedi da je jedino rješenje $(6, 10)$.