

Kolinearnost i konkurentnost

S3	Seniorska grupa
----	--------------------

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2019./2020.

Nikola Šalgaj
26. listopada 2019.



Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

mnm.hr

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

matematicari.mnm

Uvod

Zadaci u kojima treba dokazati kolinearnost triju točaka, tj. treba pokazati da tri točke leže na istom pravcu znaju izazivati bojazan kod ljudi. Sa zadacima s konkurentnim pravcima, tj. tamo gdje treba dokazati da tri pravca prolaze istom točkom, bojazan je još veća. Kako pristupiti takvim zadacima?

Srećom, ova dva problema često se mogu svesti i preformulirati u nešto jednostavnije i pristupačnije, a postoje i konkretni rezultati o kolinearnosti i konkurentnosti koji u određenim situacijama znaju biti vrlo korisni.

Nabrojimo samo za početak neke općenite i jednostavne ideje za pristup ovakvim zadacima; ovdje ih stavljam samo zato da budu na jednom mjestu, najbolji način da ih se čovjek sjeti ili nauči je naravno kroz rješavanje zadataka.

Kako pokazati da točke A , B i C leže na istom pravcu?

- $\angle ABC = 180^\circ$, ako je B "između" A i C
- $|AC| = |AB| + |BC|$, isto uz pretpostavku da je B "između" A i C
- $\angle DAB = \angle DAC$, ako je A "ispod" ili "iznad" B i C , gdje je D neka četvrta točka
- ne zvuči revolucionarno, ali je: pokazati da C leži na pravcu AB
- varijacija prethodne: ako je p neki pravac kroz A , i ako BC siječe p u A' , pokazati da je $A = A'$ (npr. pokazati $|AA'| = 0$)
- ako se pravci p i q sijeku u A , pokazati da su p , q i BC konkurentni, što nas navodi na pitanje:

Kako pokazati da pravci p , q i r prolaze istom točkom?

Pa, ako je T sjecište od p i q , pokazati da se T nalazi na pravcu r . Dokazivanje konkurentnosti možemo tako praktički svesti na dokazivanje kolinearnosti.

Uvodni zadatci

1. Neka je I središte upisane kružnice $\triangle ABC$, a M i N točke redom na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, takve da je $\angle ABI = \angle NIC$ i $\angle ACI = \angle MIB$. Dokažite da su M , I i N kolinearne.
2. Neka je $\overline{CH}$ visina šiljastokutnog trokuta $\triangle ABC$, a točke O središte njemu opisane kružnice. Ako je T nožište okomice iz točke C na pravac AO i P polovište dužine $\overline{BC}$, dokažite da su točke T , H i P kolinearne.
3. Neka je $\triangle ABC$ s tupim kutom kod vrha B , neka su D i E polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom, F točka na stranici $\overline{BC}$ takva da je $\angle BFE$ pravi, te točka G na dužini $\overline{DE}$ takva da je $\angle BGE$ pravi. Dokažite da točke A , F i G leže na istom pravcu ako i samo ako je $2|BF| = |CF|$.
4. Dokažite da se simetrale stranica $\triangle ABC$ sijeku u jednoj točki (središtu opisane kružnice).
5. Dokažite da se težišnice $\triangle ABC$ sijeku u jednoj točki (težištu).

Konkretniji rezultati

Iskažimo dva uistinu općenita i bitna rezultata:

Cevin Teorem Neka su A_1, B_1, C_1 točke na stranicama $\overline{BC}, \overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC . Dokažite da su pravci AA_1, BB_1 i CC_1 konkurentni ako i samo ako vrijedi jednakost

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1$$

Menelajev teorem Neka su točke B_1 i C_1 na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$, a točka A_1 na produžetku stranice $\overline{BC}$, trokuta ABC . Točke A_1, B_1 i C_1 su kolinearne ako i samo ako vrijedi jednakost

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1$$

Primijetimo da, koristeći navedene teoreme, u određenim situacijama možemo zaključiti da su pravci konkurentni (ili točke kolinearne) bez da išta znamo o sjecištu tih pravaca (odnosno o pravcu na kojem leže točke).

Također, primijetimo da izrazi izgledaju isto u oba teorema, no treba pripaziti - skice nisu!

Sljedeće dva rezultata nisu toliko općenita, međutim mogu se prikriveni pojaviti u zadacima i korisno ih je zapamtiti:

Teorem o Eulerovom pravcu Središte S opisane kružnice, težište T i ortocentar H proizvoljnog trokuta ABC su kolinearne točke. Pravac na kojem leže nazivamo **Eulerov pravac**.

Teorem o Simsonovom pravcu Dan je trokut ABC i proizvoljna točka P na njemu opisanoj kružnici. Označimo s A_1, B_1 i C_1 nožišta okomica iz P redom na pravce BC, AC i AB . Točke A_1, B_1 i C_1 su kolinearne i leže na pravcu kojeg nazivamo **Simsonov pravac**.

Nadalje, ako imamo dvije kružnice k_1 i k_2 mogli bismo se pitati gdje su sve točke koje imaju jednaku potenciju s obzirom na kružnicu k_1 i kružnicu k_2 . Odgovor je da se sve takve točke nalaze na pravcu koji se naziva **radikalna os** kružnica k_1 i k_2 . Dapače, sve točke radikalne osi imaju jednaku potenciju s obzirom na k_1 i k_2 . Radikalna os je okomita na pravac koji povezuje središta kružnica k_1 i k_2 . Ako su A i B sjecišta (ne nužno različita) od k_1 i k_2 , radikalna os prolazi kroz A i B . Vrijedi i sljedeći bitan teorem:

Teorem o radikalnom središtu Dane su tri kružnice k_1, k_2 i k_3 s nekolinearnim središtima. Tri radikalne osi parova tih kružnica sijeku se u jednoj točki. Tu točku nazivamo **radikalno središte** i ona je jedinstvena točka koja ima jednaku potenciju s obzirom na sve tri kružnice.

Konkretniji zadatci

- Dokažite da se težišnice trokuta sijeku u jednoj točki koristeći Cevin teorem. Pokažite isto za simetrale kutova.
- Neka je U središte upisane kružnice $\triangle ABC$. Neka su A_1, B_1 i C_1 nožišta okomica iz U redom na stranice $\overline{BC}, \overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Dokažite da su pravci AA_1, BB_1 i CC_1 konkurentni. Točka u kojoj se sijeku naziva se **Georgennova točka**.
- Dokažite teorem o Simsonovom pravcu.
- Točkom P dane kružnice k povucimo tri različite tetive $\overline{TA}, \overline{TB}$ i $\overline{TC}$. Neka su k_1, k_2, k_3 kružnice kojima su redom $\overline{TA}, \overline{TB}$ i $\overline{TC}$ promjeri. Ako su D, E i F preostala sjecišta (jedno je uvijek točka T) redom kružnica k_2 i k_3, k_1 i k_3 te k_1 i k_2 . Dokažite da točke D, E i F leže na jednom pravcu.
- Neka su p i q paralelni pravci i k kružnica koja dira p u A i siječe q u B i C . Na pravcu p odabrana je točka T takva da pravci BT i CT sijeku k na kraćem luku AC u točkama K i L redom. Neka je M polovište dužine $\overline{AT}$. Dokažite da su točke K, L i M kolinearne.
- Neka su k_1 i k_2 kružnice s promjerima $\overline{AP}$ i $\overline{AQ}$. Neka je T drugo sjecište kružnica k_1 i k_2 . Neka je Q' drugo sjecište kružnice k_1 i pravca AQ , a P' drugo sjecište kružnice k_2 i pravca AP . Kružnica k_3 prolazi točkama T, P i P' , a kružnica k_4 točkama T, Q i Q' . Ako je H drugo sjecište kružnica k_3 i k_4 , dokažite da su točke A, T i H kolinearne.



1. Koliko je $\angle MIN$?
2. Neka je točka Q sjecište pravca TH i dužine BC . Dovoljno je pokazati da je Q polovište $\overline{BC}$.
3. Koja je veza kolinearnosti točaka A , F i G te $|FB|$ i $|GD|$?
4. Označimo sjecište dviju simetrala stranica sa S . U kakvom su odnosu udaljenosti S od vrhova trokuta?
5. Promatramo sjecišta težišnica u parovima, neka su dva takva sjecišta T i T' . Ako je $\overline{AA_1}$ težišnica iz vrha A , u kakvom je odnosu $|AT|$, odnosno $|AT'|$ s $|AA_1|$?
6. Teorem o simetrali kuta
7. Vrijedi $|AB_1| = |AC_1|$, analogna je situacija kod ostalih vrhova.
8. Dovoljno je pokazati $\angle PC_1A_1 = \angle PC_1B_1$. Povucimo $\overline{PA}$ i $\overline{PB}$. Koji su sve četverokuti tetivni?
9. Želimo primijeniti Teorem o Simsonovom pravcu. Primjerice, primijetimo da se točka D nalazi na pravcu BC ...
10. Neka je točka M' sjecište pravaca KL i p . Dovoljno je pokazati da je M' polovište $\overline{AT}$. Promotrimo njezinu potenciju, $\triangle M'TL$ i $\triangle M'TK$...
11. Primijetimo da točke P , P' , Q i Q' leže na jednoj kružnici - neka je to kružnica k . Koja točka je radikalno središte kružnica k , k_3 i k_4 ?



1. Državno 2003., 4.r.
2. Državno 2009., 4.r., A
3. Državno 2012., 1.r., A
4. [Elementarna geometrija, str.30.](#)
5. [Elementarna geometrija, str.29.](#)
6. Neka su AA_1 , BB_1 i CC_1 težišnice. Tada je $|BA_1| = |A_1C|$ i analogno je za preostale dvije stranice te uvrštavanjem toga jednakost iz Cevinog teorema vidimo da su početni pravci konkurentni.
U slučaju simetrala kutova $AA_1 \dots$, gdje su $AA_1, \dots$ prirodno odabrane oznake, sjetimo se Teorema o simetrali kuta ([Teorem 4.2.](#)) prema kojem je $|BA_1| : |A_1C| = |AB| : |AC|$ i analogno za ostale, pa uvrštavanjem u Cevinu jednakost kraćenjem dobivamo traženo i zaključujemo da su pravci konkurentni.
7. Primijetimo da je $\triangle AC_1U \cong \triangle AB_1U$ što povlači $|AC_1| = |AB_1|$. Slično dobivamo $|BC_1| = |BA_1|$ i $|CA_1| = |CB_1|$. Direktnom primjenom Cevinog teorema slijedi traženo.
8. Povucimo $\overline{PB}$ i $\overline{PA}$. Jer su $\angle PC_1B$ i $\angle PA_1B$ pravi, četverokut PBC_1A_1 je tetivan (s opisanom kružnicom kojoj je promjer $\overline{PB}$). Zbog toga je $\angle PC_1A_1 = \angle PBA_1$ (obodni kutovi nad $\overline{PA_1}$). Četverokut $ABPC$ je jasno tetivan pa $\angle PBA_1 = \angle PBC = \angle PAC$ (obodni kutovi nad $\overline{PC}$). Slično kao i za PBC_1A_1 zaključujemo da je PC_1AB_1 tetivan stoga $\angle PAC = \angle PAB_1 = \angle PC_1B_1$ (obodni kutovi nad $\overline{PB_1}$). Spajanjem jednakosti dobivamo $\angle PC_1A_1 = \angle PC_1B_1$, iz čega je jasno da su B_1 , A_1 i C_1 kolinearne.
9. Točka D se nalazi na pravcu BC jer su zbog Talesovog poučka $\angle BDT = \angle CDT = 90^\circ$, pa je $\angle BDC = \angle BDT + \angle CDT = 180^\circ$. Štoviše, D je nožište okomice iz T na BC . Analogno, E je nožište okomice iz T na AC i F je nožište okomice iz T na AB . Kolinearnost točaka D , E i F sada direktno slijedi iz Teorema o Simsonovom pravcu, primijenjenog na $\triangle ABC$ i točku T .
10. [Online predavanja, Zad. 4.](#)
11. Državno 2013., 4.r., A