



Uvod

Osnovni algebarski izrazi

- kvadrat zbroja i razlike dvaju brojeva

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

- kub binoma

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

- razlika kvadrata

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

- zbroj i razlika kubova

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

- kvadrat trinoma

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

Faktorizacija

Faktorizacija algebarskih izraza je vrlo bitna jer se njom izrazi mogu bitno pojednostaviti.

Kako sve možemo faktorizirati algebarske izraze?

- izlučivanjem zajedničkog faktora
- grupiranjem članova
- prikazivanjem pojedinih članova u obliku zbroja ili razlike
- upotrebom gore navedenih formula

Zagrijavanje

1. Ako je jedan od pribrojnika u izrazu

$$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$$

jednak nuli, tada je cijeli izraz jednak nuli. Dokažite.

2. Ako za brojeve a,b,c vrijedi $a + b + c = 0$, dokažite da vrijedi

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} = 3.$$

3. Pojednostavite izraz

$$\frac{a + b + c}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \cdot \frac{ab + bc + ca}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}} \div \frac{1}{\frac{1}{abc}}$$

4. Nadite vrijednost razlomka

$$\frac{a + b}{a - b}$$

ako je $2a^2 + 2b^2 = 5ab$ i $0 < a < b$.

Umjereni zadaci

5. Dokažite da za svaki $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ vrijedi jednakost

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} = \frac{16}{1-a^{16}}.$$

6. Neka je $S = \{m \in \mathbb{Z} : m = a^2 - 5b^2, a, b \in \mathbb{N}\}$. Pokažite da je umnožak dva elementa skupa S ponovno element skupa S.

7. (**Identitet Sophie Germain**) Faktorizirajte izraz $a^4 + 4b^4$.

8. Postoje li brojevi a,b,c za koje je izraz

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a}$$

jednak nuli ako ni jedan od pribrojnika nije jednak nuli i svi su pribrojnici definirani?

Primjena

9. Dokažite da je zbroj kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv s 9.

10. Dokažite da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ broj

(a) $n^3 - n$

(b) $n^4 + 3n^3 - n^2 - 3n$

djeljiv sa 6.

11. Dokažite tvrdnje:

(a) Ukoliko je razlika kvadrata dvaju prirodnih brojeva djeljiva s 2, onda je ona djeljiva i s 4.

(b) Ne postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da su oba broja

$$\sqrt{3^k + 7}, \sqrt{3^{k+1} + 7}$$

istovremeno prirodna.

12. Izračunajte

$$\left(2013 - \sqrt{1 + 2015\sqrt{1 + 2014 \cdot 2012}}\right)^2$$

13. Korijen umnoška četiri uzastopna prirodna broja uvećanog za 1 je prirodan broj. Dokažite.

Zadaci s natjecanja

14. *Školsko natjecanje 2018., 2.razred, A varijanta*

Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$x^2 + xy - 4y^2 = -1$$

$$4x^2 + xy - 11y^2 = -2.$$

15. *Školsko natjecanje 2016., 2.razred, A varijanta*

Neka je $a = 123456789$ i $N = a^3 - 2a^2 - 3a$. Dokaži da je broj N djeljiv s 540.

16. *Školsko natjecanje 2015., 1.razred, A varijanta*

Neka su a i b pozitivni realni brojevi takvi da je $a^3 + b^3 = 2ab(a + b)$.

Odredi $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}$.

17. *Školsko natjecanje 2014., 1.razred, A varijanta*

Neka su a i b različiti realni brojevi i neka je $s = a - b$ i $t = a^3 - b^3$.

Izrazi $(a + b)^2$ pomoću s i t .

18. Školsko natjecanje 2014., 1.razred, A varijanta

Odredi realan broj a tako da $x = \frac{1}{2}$ bude rješenje jednadžbe

$$\left(\frac{x+1}{1-x} - \frac{1-x}{x+1} - \frac{4x^2}{x^2-1}\right) \left(\frac{1}{a^3+a^2} - \frac{1-a}{a^2} - 1\right) = \frac{1}{2}.$$

19. Školsko natjecanje 2012., 1.razred, A varijanta

Neka je a realan broj. Odredi zbroj svih triju rješenja jednadžbe

$$x^3 - a^2x + ax - x + a^2 - a = 0.$$

20. Školsko natjecanje 2012., 1.razred, A varijanta

Ako je $a + b = 4$ i $a^2 + b^2 = 14$, odredi $a^3 + b^3$.

21. Županijsko natjecanje 2017., 1.razred, A varijanta

Izračunaj zbroj

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}}$$

22. Županijsko natjecanje 2016., 1.razred, A varijanta

(a) Dokaži da ne postoje dva prirodna broja čija je razlika kvadrata jednaka 987654.

(b) Dokaži da ne postoje dva prirodna broja čija je razlika kubova jednaka 987654.

23. Županijsko natjecanje 2015., 1.razred, A varijanta

Neka su x i y različiti realni brojevi takvi da je $2xy + 1 \neq 0$ i neka su

$$A = \frac{6x^2y^2 + xy - 1}{2xy + 1} \quad \text{ i } \quad B = \frac{x(x^2 - 1) - y(y^2 - 1)}{x - y}.$$

Odredi koji je broj veći, A ili B .

24. Državno natjecanje 2016., 1.razred, A varijanta

Neka su a, b i c prirodni brojevi takvi da vrijedi

$$c = a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b}.$$

Dokaži da je c kvadrat nekog prirodnog broja.