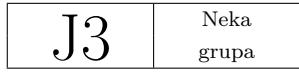


# Tetivni četverokuti i druge teme



Predavanja subotom  
Osijek, sezona 2019./2020.

Tadej Petar Tukara

26.10.2019.



Mladi nadareni matematičari  
"Marin Getaldić"



Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"



## Uvod

Cetverokut kojem se može opisati kružnica zove se tetivni četverokut. Drugim riječima, tetivni četverokuti su konveksni četverokuti čija sva četiri vrha leže na istoj kružnici, tj. njihove stranice ujedno su tetine iste kružnice. Tetivni četverokuti su najvažniji geometrijski oblik s kojim ćete se upoznati u srednjoj školi. Za rješavanje geometrijskih zadataka na natjecanjima treba se upoznati sa svojstvima tetivnih četverokuta i naučiti kako se koriste.

## Lakši zadaci

1. Neka je  $I$  središte opisane kružnice trokuta  $ABC$  te neka su  $D$  i  $E$  nožišta visina iz  $I$  na stranice  $BC$  i  $AC$ . Dokažite da je četverokut  $IDCE$  tetivan i odredite gdje mu se nalazi središte opisane kružnice.
2. Neka je dan trokut  $ABC$  i tangenta na njegovu opisanu kružnicu u točki  $B$ . Dokažite da je kut između tetine  $BC$  i tangente jednak obodnom kutu  $\angle BAC$ .
3. Neka je  $ABCD$  trapez. Dokažite da je  $ABCD$  tetivni četverokut ako i samo ako je  $ABCD$  jednakokračan trapez.
4. Unutarnje simetrale kuteva nekog četverokuta sijeku se u točkama  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$ . Dokažite da je  $ABCD$  tetivan četverokut.

## Umjereni zadaci

5. Dokaži da se simetrala kuta kod vrha  $A$  i simetrala stranice  $BC$  sijeku na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$ . Vrijedi li isto za simetralu vanjskog kuta?
6.  $H$  je ortocentar trokuta  $ABC$ . Dokažite da osnosimetrične slike točke  $H$  obzirom na stranice trokuta i njene centralnosimetrične slike obzirom na polovišta stranica leže na opisanoj kružnici tog trokuta.
7. Dokažite da polovišta stranica i nožišta visina trokuta  $ABC$  leže na kružnici.
8.  $P$  je neka točka na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$  različita od  $A$ ,  $B$  i  $C$ .  $D$ ,  $E$  i  $F$  su nožišta visina iz  $P$  na pravce na kojima leže stranice trokuta  $ABC$ . Dokažite da točke  $D$ ,  $E$  i  $F$  leže na pravcu

## Teži zadaci

9. Upisana kružnica trokuta  $ABC$  dodiruje stranice  $AB$  i  $AC$  u točkama  $E$  i  $F$ . Neka je  $P$  sjecište pravca  $EF$  i simetrale kuta  $ABC$ . Dokažite da je  $\angle BPC = 90^\circ$ .
10. U šiljastokutnom trokutu  $ABC$ ,  $BH$  je nožište visine iz vrha  $B$ . Točke  $D$  i  $E$  su polovišta  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$  redom. Neka je  $F$  osnosimetrična slika  $H$  preko  $ED$ . Dokažite da pravac  $BF$  prolazi kroz središte opisane kružnice trokuta  $ABC$ .
11. Neka je  $ABCD$  konveksan četverokut u kojem je  $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$  i  $\angle ABC > \angle CDA$ . Dane su točke  $Q$  i  $R$  be na stranicama  $BC$  i  $CD$ , redom, tako da pravac  $QR$  siječe pravce  $AB$  i  $AD$  u točkama  $P$  i  $S$ , redom, te vrijedi da je  $PQ = RS$ . Neka je  $M$  polovište  $\overline{BC}$  i  $N$  polovište  $\overline{QR}$ . Dokažite da točke  $M$ ,  $N$ ,  $A$  i  $C$  leže na kružnici.

1. OP
2. OP
3. OP-Karakteristične točke trokuta
4. OP
5. OP
6. OP
7. OP
8. Simsonov pravac
9. OP
10. IGO 2015
11. EGMO 2018.