Indukcija

Kristin Kokan

12.10.2019

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

mnm.hr   Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"   matematicari.mnm

Uvod

Matematička indukcija je metoda matematičkog dokazivanja. Treba dokazati da neka tvrdnja koja ovisi o $n \in \mathbb{N}$ vrijedi za sve prirodne brojeve n. U tu svrhu, prema principu matematičke indukcije, dovoljno je napraviti sljedeća tri koraka:

(i) baza indukcije ($n = 1$): Pokazati da tvrdnja vrijedi za $n = 1$,

(ii) induktivna pretpostavka ($n = k$): Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za prirodan broj k,

(iii) korak indukcije ($n = k+1$): Koristeći induktivnu pretpostavku treba pokazati da tvrdnja vrijedi i za prirodan broj $k + 1$.

Tada ta tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Lakši zadaci

1. Dokaži matematičkom indukcijom da vrijedi
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$
za svaki $n \in \mathbb{N}$.

2. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

4. Dokaži da je broj $2^{3n} - 7n - 1$ djeljiv s 49 za svaki prirodni broj n.

5. Dokaži da je broj $3^n - 2n^2 - 1$ djeljiv s 8 za svaki prirodni broj n.

6. Principom matematičke indukcije dokažite da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:
$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (2n - 1) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

7. Dokažite sljedeću nejednakost za svaki prirodni broj n veći od 2: $3^n > 2^n + 3n$.

Umjereni i teži zadaci

8. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi: $n! \geq 2^{n-1}, n \in \mathbb{N}$

9. Dokaži da je $2^n \geq n^2$ za sve prirodne brojeve $n \geq 4$.

10. Matematičkom indukcijom dokažite da je za svaki nenegativan cijeli broj n broj $169 \cdot 13^n + 14 \cdot 196^n$ djeljiv sa 183.

11. Dokažite da je poštanskim markama vrijednosti 3 kn i 5 kn moguće platiti svaku cjelobrojnu poštarinu od 8 kn na više.

12. Ping-pong loptice možemo složiti u pravilnu trostranu piramidu tako da donji sloj složimo u jednakostranični trokut s n loptica duž stranice, idući sloj u trokut s $n-1$ loptica duž stranice, itd. Dokažite da je za piramidu od n slojeva potrebno $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ loptica.

13. Nizovi (x_n) i (y_n) zadani su rekurzivno:

    - $x_1 = 3$, $y_1 = 1$;
    - $x_{n+1}= 3x_n + y_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$;
    - $y_{n+1}= 3y_n + x_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

    Dokaži da je $x_{2017}^2 - y_{2017}^2 = 8^{2017}$.

14. Na stolu su 2 neprazne hrpe graha. Dozvoljen potez je pojesti jednu cijelu hrpu i drugu rastaviti na dvije neprazne hrpe. Igru igraju 2 igrača naizmjence a onaj koji ne može napraviti potez gubi. Dokaži da ako postoji hrpa s parno mnogo graha, prvi igrač ima pobjedničku strategiju.

15. (Lema o rukovanju) U nekoj skupini ljudi neki su se ljudi međusobno rukovali. Dokažite da je broj ljudi koji su se rukovali s neparnim brojem ljudi paran.

16. Odredite sve funkcije $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, takve da je $f(x+y) = f(x) + f(y)$, za sve $x, y \in \mathbb{Z}$

17. Može li se ploču dimenzija 3 x 99 popločati L-triominama (pločicama od 3 kvadratića u obliku slova L)?

18. Neka su $a_1, a_2, ..., a_n > 0 \in \mathbb{R}$. Dokaži da je $\frac{a_1 + \ldots a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$.

Hintovi

1. klasična matematička indukcija
2. klasična matematička indukcija
3. klasična matematička indukcija
4. klasična matematička indukcija (izraz je oblika $49 \cdot x$, gdje je $x \in \mathbb{Z}$)
5. klasična matematička indukcija (kao i 4. zadatak)
6. klasična matematička indukcija
7. $3 * 3^n > 3(2^n + 3n)$
8. klasična matematička indukcija
9. baza $n = 4$, klasična matematička indukcija
10. iskoristi $169 = 183 - 14$ ili $196 - 13 = 183$
11. Dokazujemo da za svaki n prirodan broj postoje brojevi a,b koji su prirodni brojevi ili jednaki nula takvi da je n = 3a + 5b. Koristimo generalizirani princip matematičke indukcije, pri čemu je $n_0 = 8$.
12. Na piramidu od n slojeva dodajmo najdonji $n+1$. sloj.
13. uvrsti što je x_{n+1} i y_{n+1}
14. Što ako je jedna hrpa sačinjena od samo jednog graha?
15. gledaj mogućnosti rukovanja P i N osobe, P i P osobe te N i N osobe
16. Uvrstimo $x = y = 0$ da dobijemo $f(0) = 2f(0)$, pa dobivamo f(0) = 0. Neka je $f(1) = c$.
17. indukcijom ćemo pokazati da se 3 n tabla može pokriti za sve parne n i da se ne može pokriti ni za jedan neparni n

18. Neka tvrdnja vrijedi za $n = k$, a u koraku indukcije dokazujemo da vrijedi za $n = 2k$, a potom da vrijedi za $n = k - 1$.

Rješenja

1. Izvor.
2. Izvor.
3. FER.
4. Izvor.
5. Izvor.
6. EM1 2009.
7. Izvor.
8. Izvor.
9. Izvor.
10. EM1 2016.
11. Izvor.
12. Izvor.
13. Školsko 2017., 4. razred.
14. Izvor.
15. Izvor.
16. Izvor.
17. Izvor.
18. Izvor.